1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction série N°1 : *LES SUITES NUMERIQUES*

Exercice1 : soit $(u_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par : $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \quad \forall n \geq 2$

Calculer : u_2 ; u_3 ; u_4 ; u_{100}

Solution : On a : $u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} \quad \forall n \geq 2$

$$u_2 = (-1)^2 \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}^2-1^2} = \boxed{3+2\sqrt{2}}$$

$$u_3 = (-1)^3 \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = -\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}^2-1^2} = -\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \boxed{-2-\sqrt{3}}$$

$$u_4 = (-1)^4 \frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

$$u_{100} = (-1)^{100} \frac{\sqrt{100}+1}{\sqrt{100}-1} = \boxed{\frac{11}{9}}$$

Exercice2 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 7 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $u_1 ; u_2 ; u_3$

Solution : On a : $u_{n+1} = 5u_n - 7$

Pour n=0 on a : $u_{0+1} = 5u_0 - 7$ donc $u_1 = 5\times 2 - 7$

Donc : $u_1 = 3$

Pour n=1 on a: $u_{1+1} = 5u_1 - 7$ donc $u_2 = 5\times 3 - 7$

Donc : $u_2 = 8$

Pour n=2 on a: $u_{2+1} = 5u_2 - 7$ donc $u_3 = 5\times 8 - 7$

Donc : $u_3 = 33$

Exercice3 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \ ; \ v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calculer : $v_2 ; v_3 ; v_4$

Solution : On a $v_{n+2} = 2v_{n+1} - 3v_n$

Pour n=0 on a: $v_{0+2} = 2v_{0+1} - 3v_0$ donc $v_2 = 2v_1 - 3v_0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $v_2 = 2\times(-1)-3\times 1=-5$

Pour n=1 on a: $v_{1+2}=2v_{1+1}-3v_1$ donc $v_3=2v_2-3v_1$

Donc : $v_3=2(-5)-3(-1)=-7$

Pour n=2 on a: $v_{2+2}=2v_{2+1}-3v_2$ donc $v_4=2v_3-3v_2$

Donc : $v_4=2(-7)-3(-5)=-14+15=1$

Exercice4 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3

2) Calculer : $u_{n+1}-u_n$ en fonction de n

3) Calculer : $u_{2n+1}-u_n$ en fonction de n

Solution : 1) Pour n=1 on a : $u_1=1\Rightarrow \boxed{u_1=1}$

Pour n=2 on a : $u_2=1+\frac{1}{2}\Rightarrow \boxed{u_2=\frac{3}{2}}$

Pour n=3 on a : $u_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{u_3=\frac{11}{6}}$

2) Soit : $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}}$$

$$u_{2n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\boxed{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\ldots+\frac{1}{2n+1}}$$

Exercice5 : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n=2^{n-1}(1-3n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Vérifier que : $v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n$

Solution : On a : $v_{n+2}=2^{n+2-1}(1-3(n+2))=2^{n+1}(1-3(n+2))$

$$4v_{n+1}-4v_n=4\times 2^n(1-3(n+1))-4\times 2^{n-1}(1-3n)=2^2\times 2^n(-2-3n)-2^2\times 2^{n-1}(1-3n)$$

$$4v_{n+1}-4v_n=2^{n+2}(-2-3n)-2^{n+1}(1-3n)=2^{n+1}(-4-6n-1+3n)=2^{n+1}(1-3(n+2))$$

Donc : $v_{n+2}=4v_{n+1}-4v_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice6 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{1-u_n} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T=4$

1) Calculer : u_{2024} ; u_{2025}

PROF. ATMANI NAJIB

Solution : 1) Soit : $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=\dfrac{1+u_{n+1}}{1-u_{n+1}}=\dfrac{1+\dfrac{1+u_n}{1-u_n}}{1-\dfrac{1+u_n}{1-u_n}}=-\dfrac{1}{u_n}$

Donc : $u_{n+3}=\dfrac{1+u_{n+2}}{1-u_{n+2}}=\dfrac{1-\dfrac{1}{u_n}}{1+\dfrac{1}{u_n}}=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

Donc : $u_{n+4}=\dfrac{1+u_{n+3}}{1-u_{n+3}}=\dfrac{1+\dfrac{u_n-1}{u_n+1}}{1-\dfrac{u_n-1}{u_n+1}}=\dfrac{2u_n}{2}=u_n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+4}=u_n$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T=4$

2) $u_{2024}=u_{506\times4+0}=u_0=3$

Donc : $\boxed{u_{2024}=3}$

$u_{2025}=u_{506\times4+1}=u_1$

Pour n=0 on a : $u_{0+1}=\dfrac{1+u_0}{1-u_0}=\dfrac{1+2}{1-2}\Rightarrow\boxed{u_1=-3}$

Donc : $\boxed{u_{2025}=-3}$

Exercice7 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n=\dfrac{3n-2}{2n+3}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $-\dfrac{2}{3}$

Solution : Montrons que : $-\dfrac{2}{3}\le u_n$??

$u_n-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=u_n+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3n-2}{2n+3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3(3n-2)+2(2n+3)}{3(2n+3)}=\dfrac{13n}{3(2n+3)}\ge0$ car $n\in\mathbb{N}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $-\dfrac{2}{3}\le u_n$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $-\dfrac{2}{3}$

Exercice8 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n=-n^2+3n+7$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\dfrac{37}{4}$

Solution : Montrons que : $u_n\le\dfrac{37}{4}$; $\forall n\in\mathbb{N}$??

PROF: ATMANI NAJIB

$$u_n-\frac{37}{4}=-n^2+3n+7-\frac{37}{4}=-n^2+3n-\frac{9}{4}=-\left(n^2-3n+\frac{9}{4}\right)=-\left(n-\frac{3}{2}\right)\prec 0$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\prec\frac{37}{4}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{37}{4}$

Exercice9 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $-1\le\cos n\le 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et $-1\le\sin\sqrt{n}\le 1$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $-1\le-\sin\sqrt{n}\le 1$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $2\le 3-\sin\sqrt{n}\le 4$

Donc : $1\le 2+\cos n\le 3$ et $1/4\le\frac{1}{3-\sin\sqrt{n}}\le 1/2$

Donc : $1/4\le\frac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}}\le 3/2$

Cad : $1/4\le u_n\le 3/2$ c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice10 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=3-\frac{9}{4u_n}\ ;\ \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=3\end{cases}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{3}{2}$

Solutions : Montrons que $\frac{3}{2}\le u_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $\frac{3}{2}\le u_0$ car $\frac{3}{2}\le 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $\frac{3}{2}\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $\frac{3}{2}\le u_{n+1}$??

$u_{n+1}-\frac{3}{2}=3-\frac{9}{4u_n}-\frac{3}{2}=\frac{6\left(u_n-\frac{3}{2}\right)}{4u_n}$ et puisque on a : $\frac{3}{2}\le u_n$ alors : $u_n-\frac{3}{2}\ge 0$ et $0\prec 4u_n$

Donc : $u_{n+1}-\frac{3}{2}\ge 0$ c'est-à-dire : $\frac{3}{2}\le u_{n+1}$

Donc : $\frac{3}{2}\le u_n\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{3}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice11 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer les 3 premiers termes.
2) Montrer que la suite est minorée par 0
3) Montrer que la suite est majorée par 2
4) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :1) on a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Pour n=0 on a : $u_1 = \sqrt{u_0 + 2}$ donc $u_1 = \sqrt{2}$

Pour n=1 on a : $u_2 = \sqrt{u_1 + 2}$ donc $u_2 = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$

Pour n=2 on a : $u_3 = \sqrt{u_2 + 2}$ donc $u_3 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2} + 2} + 2}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 0 \le u_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $0 \le u_0$.
Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence
Supposons que : $0 \le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0 \le u_{n+1}$??

Or on a : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \ge 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 0 \le u_n$

Donc : La suite est minorée par 0 car $0 \le u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \le 2$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $u_0 \le 2$.
Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence
Supposons que : $u_n \le 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \le 2$??

On a : $u_n \le 2$ donc $u_n + 2 \le 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{4} \Rightarrow u_{n+1} \le 2$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 0 \le u_n$

4) On a $u_n \le 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et $0 \le u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 0 \le u_n \le 2$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice12 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\ge 1}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que $(u_n)_{n\ge 2}$ est majorée par 0.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\} \ : u_n \le 0$

PROF: ATMANI NAJIB

1étapes : calculons u_2

$u_{1+1} = \frac{(3+3)u_1 - 8 - 12}{1} \Rightarrow u_2 = \frac{18-8-12}{1} \Rightarrow u_2 = -2$

On a : $u_2 \leq 0$ donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $u_n \leq 0$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq 0$??

On a : $u_n \leq 0$ et $n \succ 0$ donc $(3n+3)u_n - 8n - 12 \prec 0$

Donc : $u_{n+1} \prec 0$ et donc : $u_{n+1} \leq 0$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$: $u_n \leq 0$

Donc : $(u_n)_{n\geq 2}$ est majorée par 0.

Exercice13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = n - \sqrt{n}$: $\forall n \in \mathbb{N}$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solution : $u_{n+1} - u_n = \left(n+1-\sqrt{n+1}\right) - \left(n - \sqrt{n}\right) = 1 + \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{\left(1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)\left(1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ (Le conjugué)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\left(1+\sqrt{n}\right)^2 - \sqrt{n+1}^2}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1+2\sqrt{n}+n-n-1}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 0 \ : \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Donc : $u_{n+1} - u_n \geq 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Exercice14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \frac{n!}{3^n}$: $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ Avec : $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ Comme : $u_n = \frac{n!}{3^n} \succ 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{(n+1)n!}{3^n \times 3^1} \times \frac{3^n}{n!} = \frac{n+1}{3}$$

On a : $n \geq 2$ alors : $n+1 \geq 3$ et donc : $\frac{n+1}{3} \geq 1$

Alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$: $u_n \leq u_{n+1}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante

Exercice15 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

PROF: ATMANI NAJIB

Solutions : $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}+\frac{2^{n+1}}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{2^{n+1}}{n+1}\succ 0$ par suite : $u_n\le u_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice16 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=\alpha$ avec : $\alpha\succ 1$ et $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$

1) Montrer que : la suite (u_n)est minorée par 1

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Solutions : 1) Montrons que $1\le u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$????

1étapes : n=0 on a : $1\le u_0$ car $1<\alpha$
Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $1\le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $1\le u_{n+1}$??

Remarque importante : on peut essayer d'écrire : u_{n+1} sous une autre écriture pour pouvoir faire des encadrements : $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}=\frac{2(u_n+2)-3}{u_n+2}=\frac{2(u_n+2)}{u_n+2}-\frac{-3}{u_n+2}=2-\frac{-3}{u_n+2}$

On a : $1\le u_n$ donc : $3\le u_n+2$ donc : $\frac{1}{u_n+2}\le\frac{1}{3}$ donc : $\frac{-3}{u_n+2}\ge\frac{-3}{3}$ donc : $\frac{-3}{u_n+2}\ge -1$

Donc : $2+\frac{-3}{u_n+2}\ge 1$ Donc : $1\le u_{n+1}$ CQFD

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Etude du signe de : $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+1}{u_n+2}-u_n=\frac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+1}{u_n+2}=\frac{1-u_n^2}{u_n+2}=\frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$

On a : $1\le u_n$ donc : $1-u_n\le 0$ et $0\le 1+u_n$et $0\prec 2+u_n$

Donc : $u_{n+1}-u_n\le 0$ Donc : la suite (u_n) est décroissante

Exercice17 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Solutions : Montrons par récurrence que $u_n\le u_{n+1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : on a $u_1=\sqrt{u_0+2}=\sqrt{2}$

Pour n=0 nous avons $u_0=1$ donc : $u_0\le u_1$.

Donc : la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n\le u_{n+1}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le u_{n+2}$??

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $u_n \leq u_{n+1}$ donc $u_n+2 \leq u_{n+1}+2$ donc : $\sqrt{u_n+2} \leq \sqrt{u_{n+1}+2}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Exercice18 : Soit fonction f définie par : $f(x)=x^2+\frac{3}{4}x$

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{5}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$:($\forall n \in \mathbb{N}$)

1) Dresser le tableau de variation de f

2)a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

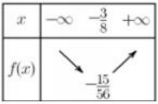
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

Solution : 1) $\forall x \in \mathbb{R}$; Pour : $f(x)=x^2+\frac{3}{4}x$; On a f est une fonction polynôme donc :

$D_f=\mathbb{R}$: On utilisant le résumé de notre cours :

On a : $a=1 \succ 0$ et $b=\frac{3}{4}$ et $c=0$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{8}$ et $f(\alpha)=f\left(-\frac{3}{8}\right)=\left(-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{3}{4}\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{15}{56}$



x	$-\infty$	$-\frac{3}{8}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$-\frac{15}{56}$	↗

Donc : f est strictement croissante sur $I=\left[-\frac{3}{8},+\infty\right[$ et f est strictement décroissante sur $J=\left]-\infty,-\frac{3}{8}\right]$

2) a) Montrons que :($\forall n \in \mathbb{N}$) : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$?

On a : $0 \leq u_0 = \frac{1}{5} \leq \frac{1}{4}$ la ppté est vraie pour n=0

Supposons que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

Montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$?

On a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$ f est strictement croissante sur $I=\left[-\frac{3}{8},+\infty\right[$ donc strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{4}\right]$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $f(0) \leq u_{n+1} \leq f\left(\frac{1}{4}\right)$ et comme : $f(0)=0$ et $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

Alors : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{4}$ Conclusion : ($\forall n \in \mathbb{N}$) : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante

$$u_{n+1}-u_n = u_n{}^2+\frac{3}{4}u_n-u_n = u_n{}^2-\frac{1}{4}u_n = u_n\left(u_n-\frac{1}{4}\right)$$

Et puisque : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ alors : $0 \leq u_n$ et $u_n-\frac{1}{4} \leq 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n \leq 0$: ($\forall n \in \mathbb{N}$)

Donc : la suite (u_n) est décroissante

Exercice19 : Etudier la nature des *suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :*

$u_{n+1}=u_n-3$ et $u_0=2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$v_n=n^2+2 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

Solution :1) On a : $u_{n+1}=u_n-3 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=-3=constante$

Donc : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=-3$ et de premier terme $u_0=2$

2) On a : $v_0=2$; $v_1=3$; $v_2=6$

Ainsi : $v_1-v_0=1$ et $v_2-v_1=3$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

On a aussi : et $\frac{v_1}{v_0}=\frac{3}{2}$ et $\frac{v_2}{v_1}=2$ c'est-à-dire : $\frac{v_1}{v_0}\neq\frac{v_2}{v_1}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas géométrique

Exercice20 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r=-2$ et $u_0=-2$

1) Calculer : u_1

2) Montrer que : $u_n=-2(n+1) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) Est ce que le terme -22 est un terme de la suite $(u_n)_n$? justifier votre réponse

4) Calculer la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=-2$ et sa raison $r=-2$

alors : $u_1=u_0+r=-2+-2=-4$

2) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique alors : $u_n=u_0+nr=-2+(-2)n=-2(1+n) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_n=-22 \Leftrightarrow -2(1+n)=-22 \Leftrightarrow 1+n=\frac{-22}{-2} \Leftrightarrow 1+n=11 \Leftrightarrow n=11-1 \Leftrightarrow n=10$

Donc : -22 est un terme de la suite $(u_n)_n$ et on a : $u_{10}=-22$

4) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

$S=11\frac{-2+-22}{2}=11\times\frac{-24}{2}=11\times(-12)=-132$

Exercice 21 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5=-7$ et $u_8=2$

et Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $v_n=25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) a) Vérifier que la raison de la suite $(u_n)_n$ est : $r=3$

b) Calculer : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6$

2) a) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{5}{3}$

b) Calculer la somme suivante : $S_2=v_0+v_2+\cdots+v_6$

Solution : 1) a) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_5=-7$ et $u_8=2$

Donc : $u_n=u_p+(n-p)r$

On pose : n=8 et p=5

Donc : $u_8=u_5+(8-5)r$

Donc : $2=-7+3r$

Donc : $2+7=3r$

Donc : $9=3r$ c'est-à-dire : $r=\frac{9}{3}=3$

b) Calcul de la somme suivante : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6=(6-0+1)\frac{u_0+u_6}{2}$

On a : $u_n=u_p+(n-p)r$

Donc : $u_8=u_0+(8-0)\times 3$

Donc : $2=u_0+24$

Donc : $2-24=u_0$ Donc : $-22=u_0$

Et on a : $u_n=u_p+(n-p)r$

Donc : $u_6=u_0+(6-0)3$

Donc : $u_6=-22+18=-4$

Donc : $S_1=u_0+u_1+\cdots+u_6=7\frac{-22+(-4)}{2}=7\frac{-26}{2}=7\times(-13)=-91$

2) a) On a : $v_n=25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{25\times\left(\frac{5}{3}\right)^n}=\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{5}{3}\right)^n}=\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1-n}=\left(\frac{5}{3}\right)^1=\frac{5}{3}=q$$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$

3) Puisque la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{3}$

Alors : $S_2 = v_0 + v_2 + \cdots + v_6 = v_0 \frac{1-q^{6-0+1}}{1-q}$

On a : $v_n = 25 \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$

Pour n=0 : on a : $v_0 = 25 \times \left(\frac{5}{3}\right)^0$ par suite : $v_0 = 25 \times 1 = 25$ car $\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$

$$S_2 = 25\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^7}{1-\frac{5}{3}} = 25\times\frac{1-\left(\frac{5}{3}\right)^7}{-\frac{2}{3}} = -25\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^7\right) = -\frac{75}{2}\left(1-\left(\frac{5}{3}\right)^7\right)$$

Exercice22 : Déterminer le réel x pour que les nombres : $3x-1$; $1-4x$ et $x-5$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Solution : $3x-1$; $1-4x$ et $x-5$ les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

$\Leftrightarrow 2(1-4x) = (3x-1)+(x-5) \Leftrightarrow -8x+2 = 4x-6 \Leftrightarrow -12x = -8 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Donc les termes de la suite sont : $3\times\frac{2}{3}-1=1$ et $1-4\times\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3}-5 = -\frac{13}{3}$

Donc : $-\frac{5}{3}-1 = -\frac{8}{3} = r$

Exercice23 : Calculer en fonction de n les sommes suivantes :

1) $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = 1+2+3+\ldots+n$

2) $s_n' = \sum_{k=0}^{k=n} (2k+1) = 1+3+5+\ldots+(2n+1)$

Solutions :1) on pose : $u_n = n$

On a : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=1

Car : $u_{n+1} - u_n = 1$

Donc : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$

Donc : $s_n = \frac{n}{2}(1+n)$

1)on pose : $v_n = 2n+1$

On a : $(v_n)_n$ une suite arithmétique de raison r=2

Car : $v_{n+1} - v_n = 2$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $s_n' = \sum_{k=0}^{k=n}(2k+1) = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$

Donc : $s_n' = \frac{n+1}{2}(1+2n+1) = \frac{n+1}{2}(2n+2) = (n+1)^2$

Exercice24 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que : $\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = 21 \\ 5u_1 - u_2 = 9 \end{cases}$

1) Calculer : u_1 et u_2

2) Calculer la raison q de cette suite

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer la somme suivante : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_5$

Solution : 1) Calculons : u_1 et u_2

On a : $\begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = 21 \\ 5u_1 - u_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = 21 \ (1) \\ 10u_1 - 2u_2 = 18 \ (2) \end{cases}$

Donc : $(1)+(2) \Rightarrow 13u_1 = 39 \Rightarrow u_1 = 3$

$5u_1 - u_2 = 9 \Rightarrow u_2 = 5u_1 - 9 \Rightarrow u_2 = 6$

Donc : $u_1 = 3$ et $u_2 = 6$

2) La raison q??

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$

Pour n= 2 et p = 1 on a : $u_2 = u_1 q^1 \Leftrightarrow \boxed{q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{6}{3} = 2}$

3) Ecriture de u_n en fonction de n

On a : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p \times q^{n-p} \Rightarrow u_n = u_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

4) Calculons la somme : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_5$

$(u_n)_n$ est une suite géométrique donc : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_5 = u_1 \frac{1-q^{5-1+1}}{1-q} = 3\frac{1-2^5}{1-2} = \boxed{93}$

Exercice25 : problème

La location d'une machine coûte 60 DH la 1ère journée. La 2ème journée de location coûte 65 DH et chaque journée supplémentaire 5 DH de plus que la précédente.

Combien de jours pourra-t-on utiliser la machine avec un budget de 3570 DH ? Vous ferez apparaître sur votre copie tous les calculs nécessaires.

Solution : $(u_n)_{n\geq 1}$ Une suite arithmétique :La raison r de cette suite : $r = 5\,DH$

Dont le premier terme est : $u_1 = 60DH$ La location pour la 1ère journée

$u_2 = 65DH$ La location pour la 2ère journée

....

$u_n = ...DH$ La location pour la n ère journée

u_n en fonction de n ?

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour p = 1 on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$

Donc : $u_n = 60 + (n-1)5$ c'est-à-dire : $u_n = 5n+55 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

La somme totale à payer serait : $s_n = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n = n\dfrac{u_1+u_n}{2} = n\dfrac{60+5n+55}{2} = n\dfrac{5n+115}{2}$

Le nombre de jours pour utiliser la machine avec un budget de 3570 DH est n :

$$s_n = 3570 \Leftrightarrow n\frac{5n+115}{2} = 3570 \Leftrightarrow 5n^2+115n-7140=0 \Leftrightarrow n^2+23n-1428=0$$

$\Delta = 6241$ Donc : $n=-51 \quad rejeté \quad et\ n=28$

Le nombre de jours pour utiliser la machine avec un budget de 3570 DH est $n=28$ jours.

Exercice26 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2u_n-1}{u_n} \\ u_0 = 3 \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Définie par : $v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

2) Ecrire v_n en fonction de n

3) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n}-1}-\dfrac{1}{u_n-1} = \dfrac{u_n}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_n-1} = 1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme : $v_0 = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$

2) Ecriture de u_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme : $v_0 = \dfrac{1}{2}$

Donc : $v_n = v_0 + nr = \dfrac{1}{2}+n\times 1 = \dfrac{1}{2}+n = \dfrac{2n+1}{2}$

Puisque : $v_n = \dfrac{1}{u_n-1}$ c'est-à-dire : $u_n = \dfrac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n = \dfrac{v_n+1}{v_n} = \dfrac{1+\frac{2n+1}{2}}{n+1} = \dfrac{\frac{2n+1+2}{2}}{\frac{2n+1}{2}} = \dfrac{\frac{2n+3}{2}}{\frac{2n+1}{2}} = \dfrac{2n+3}{2n+1}$

4) On pose : $S_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$; Calculons : S_n en fonction de n

$S_n = v_0+v_1+\ldots+v_{n-1} = n\dfrac{v_0+v_{n-1}}{2}$

On a : $v_n = \dfrac{2n+1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = \dfrac{2(n-1)+1}{2} = \dfrac{2n-1}{2}$

Donc : $S_n = n\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2n-1}{2}}{2} = \dfrac{n^2}{2}$

Exercice27 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Et soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; v_0

2) Montrer par récurrence que : $u_n \leq 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution : 1) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 1$ c'est-à-dire : $u_1 = \frac{1}{2}\times 1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$

Donc : $u_1 = \frac{3}{2}$

Pour n=1 on : $u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1$ c'est-à-dire : $u_2 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

On a : $v_n = u_n - 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$ c'est-à-dire : $v_0 = -1$

Pour n=1 on : $v_1 = u_1 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$ c'est-à-dire : $v_1 = -\frac{1}{2}$

2) Montrons que : $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \leq 2$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \leq 2$

Montrons que : $u_{n+1} \leq 2$?

$2 - u_{n+1} = 2 - \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = 2 - \frac{1}{2}u_n - 1 = 1 - \frac{u_n}{2} = \frac{2-u_n}{2}$

On a : $u_n \leq 2$ donc $2 - u_n \geq 0$

Donc : $\frac{2-u_n}{2} \geq 0$ par suite : $u_{n+1} \leq 2$

PROF ATMANI NAJIB

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = \frac{u_n + 2 - 2u_n}{2} = \frac{-u_n + 2}{2} = \frac{2 - u_n}{2} \; ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et On a : $u_n \leq 2$ donc : $2 - u_n \geq 0$ par suite : $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n}{2} \geq 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq .... \leq u_n$

Donc : $u_0 \leq u_n$ c'est-à-dire : $1 \leq u_n \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2 car $u_n \leq 2 \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 car $1 \leq u_n \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$?

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2 = \frac{u_n}{2} - 1 = \frac{u_n - 2}{2}$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0 = -1$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et son premier terme : $v_0 = -1$

Alors : $v_n = v_0 \times q^n = (-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) On a : $v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n + 2 = u_n$ et on a : $v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $u_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

a) Calcul de : S_n en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n = (\textit{le premier terme dans la somme})\frac{1 - \textit{raison}^{(\textit{le nombre de termes})}}{1 - \textit{raison}}$

$\textit{le nombre de termes} = n - 0 + 1 = n + 1$

Donc : $S_n = v_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

PROF ATMANI NAJIB

Exercice28 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

Et Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n-3}{u_n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

4) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

Solution : 1) a) Montrons que : $0 \leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \geq 0$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $0 \leq u_n$

Montrons que : $0 \leq u_{n+1}$?

On a : $0 \leq u_n$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n+3}{u_n+3}$ donc $u_{n+1} \geq 0$

Donc : $0 \leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrons que : $u_n \leq 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \leq 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \leq 3$

Montrons que : $u_{n+1} \leq 3$?

$$3-u_{n+1} = 3-\frac{5u_n+3}{u_n+3} = \frac{3(u_n+3)-(5u_n+3)}{u_n+3} = \frac{-2u_n+6}{u_n+3} = \frac{-2(u_n-3)}{u_n+3}$$

On a : $u_n \leq 3$ et $0 \leq u_n$ donc $3-u_{n+1} \geq 0$

Donc : $u_{n+1} \leq 3$

Donc : $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$u_{n+1}-u_n = \frac{5u_n+3}{u_n+3} - u_n = \frac{5u_n+3-u_n(u_n+3)}{u_n+3} = \frac{-u_n^2+2u_n+3}{u_n+3}$$

On a : $0 \leq u_n$ donc $0 \prec u_n+3$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ est celui de : $-u_n^2+2u_n+3$

$\Delta = 4+12 = 16 > 0$ donc: $x_1 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3$

Donc : $-u_n^2+2u_n+3 = -(u_n-3)(u_n+1)$

On a : $u_n \geq 0$ donc $u_n+1 \geq 0$

PROF. ATMANI NAJIB

Et on a : $u_n \le 3$ donc : $u_n - 3 \le 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 3)(u_n + 1)}{u_n + 3} \ge 0$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - 3}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 3 - 3(u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{5u_n + 3 + (u_n + 3)}{u_n + 3}} = \frac{\frac{2u_n - 6}{u_n + 3}}{\frac{6u_n + 6}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 6}{6u_n + 6}$

$v_{n+1} = \frac{2(u_n - 3)}{6(u_n + 1)} = \frac{1}{3}\frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{1}{3}v_n$

Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 1} = \frac{1 - 3}{1 + 1} = -1$

4)puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = -1$ alors :

$v_n = (-1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Et on a : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n u_n + v_n - u_n = -3$

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 - v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-3 - v_n}{v_n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{3 + v_n}{1 - v_n}$

Et on a : $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc : $u_n = \frac{3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Exercice29 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \le u_n \le 4$

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $4 - u_n \le 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solution : 1) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n \le 4$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0 = 0$ donc $0 \le u_0 \le 4$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence

Supposons que : $0 \le u_n \le 4$

3étapes : Montrons alors que : $0 \le u_{n+1} \le 4$??

On a : $0 \le u_n \le 4 \Rightarrow 0 \le 3u_n \le 12 \Rightarrow 4 \le 3u_n + 4 \le 16 \Rightarrow \sqrt{4} \le \sqrt{3u_n + 4} \le \sqrt{16} \Rightarrow 2 \le \sqrt{3u_n + 4} \le 4 \Rightarrow 2 \le u_{n+1} \le 4$

Donc : D'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \le u_n \le 4$

PROF. ATMANI NAJIB

2) Montrons que la suite (u_n) est croissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n=\sqrt{3u_n+4}-u_n=\dfrac{\left(\sqrt{3u_n+4}-u_n\right)\left(\sqrt{3u_n+4}+u_n\right)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\dfrac{3u_n+4-u_n^2}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\dfrac{-u_n^2+3u_n+4}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$

Le signe de $u_{n+1}-u_n$ un est celui de : $-u_n^2+3u_n+4$ car $\sqrt{3u_n+4}+u_n\succ 0$ en effet $(0\le u_n)$

Étudions le signe du trinôme : $-x^2+3x+4$: $\Delta=b^2-4ac=9+16=25\succ 0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+\sqrt{25}}{-2}=\dfrac{-3+5}{-2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{-2}=\dfrac{-3-5}{-2}=4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-4)(u_n-(-1))}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}=\dfrac{-(u_n-4)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$ et puisque : $0\le u_n\le 4$

Alors : $(u_n-4)(u_n+1)\le 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1}-u_n\ge 0$

Par suite : la suite (u_n) est croissante.

Remarque : methode2

Le tableau de signe du trinôme : $-x^2+3x+4$ est le suivant :

X	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$-X^2+3X+4$		$-$	0	$+$	0	$+$	

et puisque : $0\le u_n\le 4$ alors : $-u_n^2+3u_n+4\ge 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n\ge 0$ et la suite (u_n) est croissante.

---

3)b) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$

Soit $n\in\mathbb{N}$: $4-u_{n+1}=4-\sqrt{3u_n+4}=\dfrac{\left(4-\sqrt{3u_n+4}\right)\left(4+\sqrt{3u_n+4}\right)}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\dfrac{16-3u_n-4}{4+\sqrt{3u_n+4}}=\dfrac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}}$

Donc : $4-u_{n+1}=\dfrac{3}{4+\sqrt{3u_n+4}}(4-u_n)$

On a : $0\le u_n\le 4\Rightarrow 0\le 3u_n\le 12\Rightarrow 4\le 3u_n+4\le 16\Rightarrow\sqrt{4}\le\sqrt{3u_n+4}\le\sqrt{16}\Rightarrow 2\le\sqrt{3u_n+4}\le 4\Rightarrow 6\le\sqrt{3u_n+4}+4\le 8$

$\Rightarrow\dfrac{1}{8}\le\dfrac{1}{\sqrt{3u_n+4}+4}\le\dfrac{1}{6}\Rightarrow\dfrac{3}{8}\le\dfrac{3}{\sqrt{3u_n+4}+4}\le\dfrac{1}{2}$ Alors : $\dfrac{3}{8}(4-u_n)\le\dfrac{3(4-u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+4}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$ car $0\le u_n\le 4$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$; $4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$

b) Déduisons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $4-u_n\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $4-u_0=4$ et $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=4\times 1=4$ donc $4-u_0\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence

Supposons que : $4-u_n\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3étapes : Montrons alors que : $4-u_{n+1}\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$??

On a : $4-u_n\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\Rightarrow\dfrac{1}{2}(4-u_n)\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\times\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}(4-u_n)\le 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme : $4-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(4-u_n)$

PROF: ATMANI NAJIB

Alors : $4-u_{n+1}\le 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Donc : D'après le principe de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 4-u_{n+1}\le 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Exercice30 : Devoir (6pts) : $(0{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+1{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{2u_n+1} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=2 \end{cases}$

❶Calculer les termes : u_1 et u_2 ❷Montrer que : $u_n\succ 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$

❸a- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante b- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

❹ a- Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}-1\le\frac{1}{3}(u_n-1)$ b- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $0\prec u_n-1\le\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice31 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

1)Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) on pose : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n\le\beta_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que : ($\forall n\in\mathbb{N}$) $\frac{1}{2}\le u_n\le 1$

4) Montrer que : $|u_{n+1}-u_n|\le\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution :1) Soit : $x_1\in\mathbb{R}^+$ et $x_2\in\mathbb{R}^+$ tel que : $x_1\le x_2$

$$x_1\le x_2\Rightarrow x_1+1\le x_2+1\Rightarrow\frac{1}{x_1+1}\ge\frac{1}{x_2+1}\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$$

Donc f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$

2) On a : $\alpha_n=u_{2n+1}$ et $\beta_n=u_{2n}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $\alpha_{n+1}=(f\circ f)(\alpha_n)$ et $\beta_{n+1}=(f\circ f)(\beta_n)$

Et puisque f est décroissante Sur $\mathbb{R}^+$ et $f(\mathbb{R}^+)\subset\mathbb{R}^+$ alors : $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

a) Montrons que : $\alpha_n\le\alpha_n+1$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $\alpha_0=\frac{1}{2}\le\alpha_1=\frac{3}{5}$ et $\beta_1=\frac{2}{3}\le\beta_0=1$

On suppose que : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$

Montrons que : $\alpha_{n+1}\le\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\le\beta_{n+1}$?

On a : $\alpha_n\le\alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1}\le\beta_n$ et puisque $f\circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$

Alors :$(f\circ f)(\alpha_n)\le(f\circ f)(\alpha_{n+1})$ et $(f\circ f)(\beta_{n+1})\le(f\circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1}\le\alpha_{n+2}$ et $\beta_{n+2}\le\beta_{n+1}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ et $\beta_{n+1} \leq \beta_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante

b) Montrons que : $\alpha_n \leq \beta_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ et $\beta_1 = 1$ donc : $\alpha_0 \leq \beta_0$

On suppose que : $\alpha_n \leq \beta_n$

Montrons que : $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$?

On a : $\alpha_n \leq \beta_n$ et puisque $f \circ f$ est croissante Sur $\mathbb{R}^+$ alors : $(f \circ f)(\alpha_n) \leq (f \circ f)(\beta_n)$

Donc : $\alpha_{n+1} \leq \beta_{n+1}$ donc : $\alpha_n \leq \beta_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Puisque : $\alpha_0 \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_0 \;\; (\forall n \in \mathbb{N})$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n} \leq 1$

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \;\; (\forall n \in \mathbb{N})$

4) Montrons que : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \;\; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Pour n=1 on a : $|u_2 - u_1| = \frac{1}{6}$ donc : $|u_2 - u_1| \leq \frac{1}{1}$

On suppose que : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$

Montrons que : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$?

On a : $|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left| \frac{1}{u_{n+1}+1} - \frac{1}{u_n+1} \right| = \frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} |u_{n+1} - u_n|$

Et on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ donc : $\frac{3}{2} \leq 1 + u_n \leq 2$ et $\frac{3}{2} \leq 1 + u_{n+1} \leq 2$

Donc : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_{n+1}+1} \leq \frac{2}{3}$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{2}{3}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} \leq \frac{4}{9}$ et $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$

Donc : $\frac{1}{(u_{n+1}+1)(u_n+1)} |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9n}$

Et on a : $\frac{1}{n+1} - \frac{4}{9n} = \frac{5n-4}{9n(n+1)} \succ 0$ donc : $\frac{4}{9n} \prec \frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{n+1}$

Donc : $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}^*$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Prof : ATMANI NAJIB

PROF: ATM