1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°2 : *LES SUITES NUMERIQUES*

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice1 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 ; u_2

2) Déterminer u_{n+2} en fonction de u_n et que peut-on déduire ?

Solution :1) Pour n=0 on a: $u_{0+1} = \dfrac{u_0}{u_0-1} = \dfrac{3}{3-1} \Rightarrow \boxed{u_1 = \dfrac{3}{2}}$

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = \dfrac{u_1}{u_1-1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}-1} \Rightarrow \boxed{u_2 = 3}$

2) Soit : $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{u_n}{u_n-1}}{\dfrac{u_n}{u_n-1}-1} = \dfrac{u_n}{u_n - u_n + 1} = u_n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+2} = u_n$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période : $T = 2$

Exercice2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n \\ u_0 = 1\ ;\ \ u_1 = -1 \end{cases} \forall n\in\mathbb{N}$

Calculer : u_2 ; u_3 ; u_4

Solution : On a : $\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n \\ u_0 = 1\ ;\ \ u_1 = -1 \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc :

$\rightarrow n = 0 \Rightarrow u_{0+2} = 2u_{0+1} - 3u_0 \Rightarrow u_2 = 2u_1 - 3u_0 \Rightarrow u_2 = 2\times(-1) - 3\times 1 \Rightarrow \boxed{u_2 = -5}$

$\rightarrow n = 1 \Rightarrow u_{1+2} = 2u_{1+1} - 3u_1 \Rightarrow u_3 = 2u_2 - 3u_1 \Rightarrow u_3 = 2\times(-5) - 3\times(-1) \Rightarrow \boxed{u_3 = -7}$

$\rightarrow n = 2 \Rightarrow u_{2+2} = 2u_{2+1} - 3u_2 \Rightarrow u_4 = 2u_3 - 3u_2 \Rightarrow u_4 = 2\times(-7) - 3\times(-5) \Rightarrow \boxed{u_4 = 1}$

Exercice3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1

2) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$

3) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution :1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq 1$?

$$1-u_n=1-\frac{n+1}{2n+1}=\frac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}\geq 0$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leq 1$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1

2) Montrons que : $\frac{1}{2} \leq u_n$??

$$u_n-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\geq 0$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \leq u_n$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{1}{2}$

3) On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$

Exercice4 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3n^2+6n-4$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

Solutions : Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = 3n^2+6n-4 = 3\left(n^2+2n\right)-4 = 3\left((n+1)^2-1\right)-4$

Donc : $u_n = 3(n+1)^2-7$

On a : $(n+1)^2 \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $3(n+1)^2 \geq 0$ c'est-à-dire : $(n+1)^2-7 \geq -7$

Donc : $u_n \geq -7$ par suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par -7

Exercice5 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Solutions : Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que :

$\forall n \in I \; |u_n| \leq M$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n| = \left|(-1)^n \sin\sqrt{n}\right| = \left|(-1)^n\right|\left|\sin\sqrt{n}\right| = \left|\sin\sqrt{n}\right| \leq 1$

Donc : $|u_n| \leq 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice6 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n}{2u_n+1} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Solutions : Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $: 0 \leq u_n \leq 3$

PROF. ATMANI NAJIB

1étapes : n=0 on a : $0 \leq u_0 \leq 3$ car $0 < 1 < 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que: $0 \leq u_n \leq 3$

3étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$??

On a : $0 \leq u_n$ donc $0 \leq 2u_n + 1$ et $0 \leq 7u_n$

Donc $0 \leq u_{n+1}$ (1) et on a : $u_{n+1} - 3 = \frac{7u_n}{2u_n+1} - 3 = \frac{7u_n - 3(2u_n+1)}{2u_n+1}$

$u_{n+1} - 3 = \frac{u_n - 3}{2u_n+1}$ et puisque on a : $0 \leq u_n \leq 3$

On a donc : $u_n - 3 \leq 0$ et $0 \leq 2u_n + 1$

Donc : $u_{n+1} - 3 \leq 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq 3$ (2)

De (1) et (2) en déduit que : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 3$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1 et majorée par 3.

Exercice7 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \frac{-n}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Solutions : Montrons que : $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{-(n+1)}{n+1+2}\right) - \left(\frac{-n}{n+2}\right) = \frac{-n-1}{n+3} + \frac{n}{n+2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(-n-1)(n+2) + n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{-2}{(n+3)(n+2)} < 0$$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc $u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Exercice8 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : : $\begin{cases} u_0 = 1 \ ; \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n - 2 \end{cases} \ : \forall n \in \mathbb{N}$

Montrer que suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Solutions : Montrons par récurrence que : $u_{n+1} \leq u_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : On a $u_1 \leq u_0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_{n+1} \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$??

On a : $u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - 2 - u_{n+1}$

Donc $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n - 2$ et on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n - 2 \leq 0$ donc $u_{n+2} - u_{n+1} \leq 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : u_{n+1} \leq u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Exercice9 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n^{\ 2} - 2u_n + 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}-u_n = 3u_n^{\ 2}-2u_n+1-u_n = 3u_n^{\ 2}-3u_n+1 = 3\left(u_n^{\ 2}-u_n\right)+1$

On a : $u_{n+1}-u_n = 3\left(\left(u_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)$ et comme : $\left(u_n-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Alors : $\left(u_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$

Donc : $u_{n+1}-u_n \succ 0$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et comme : $u_0 = 1$ alors : $u_n \geq 1$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice 10 : Soit les suites numériques : (x_n) et (u_n) et (v_n) définies par :

$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $u_n = x_{2n}$ et $v_n = x_{2n+1} \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie des suite (u_n) et (v_n)

Solution : $u_{n+1}-u_n = x_{2n+2}-x_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2} \succ 0$

Donc : (u_n) est croissante

$v_{n+1}-v_n = x_{2n+3}-x_{2n+1} = \frac{1}{(2n+3)^2}-\frac{1}{(2n+2)^2} \prec 0$

Donc : (v_n) est décroissante.

Exercice11 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r=-3$ et $u_{10}=-20$

1) Vérifier que : $u_0 = 10$

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer la somme suivante : $S = u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

4) Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = \frac{2}{3^n} \ \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(v_n)_n$ une suite géométrique et déterminer sa raison

Solution :1) On a : $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p+(n-p)r$

Pour n= 10 et p=0 on a : $u_{10} = u_0+(10-0)r$

Donc : $-20 = u_0+10\times(-3)$

Donc : $-20 = u_0-30$ c'est-à-dire : $-20+30 = u_0$

Donc : $10 = u_0$

2) u_n en fonction de n ?

PROF: ATMANI NAJIB

$u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow u_n = 10 - 3n$

Donc : $u_n = 10 - 3n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Calcul de la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = (10 - 0 + 1)\dfrac{u_0 + u_{10}}{2}$

$$S = 11\frac{10 + (-20)}{2} = 11\frac{-10}{2} = 11 \times (-5) = -55$$

4) Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = \dfrac{2}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{2}{3^{n+1}}}{\dfrac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^n \times 3^1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3} = q$$

Donc la suite $(v_n)_n$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$

Exercice12 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que : sa raison $q = 2$ et $u_5 = 96$

1) Vérifier que : $u_0 = 3$

2) Calculer : u_7

3) Calculer : $S = u_0 + u_3 + \cdots + u_7$

Solution : 1) On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique :

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = q^n u_0$

Donc : $u_5 = q^5 u_0$

Donc : $96 = 2^5 u_0$

Donc : $96 = 32 \times u_0$

Donc : $u_0 = \dfrac{96}{32} = 3$

2) Calcul de : u_7

$u_7 = q^7 u_0 = 2^7 \times 3 = 128 \times 3 = 384$

3) Calcul de : $S = u_0 + u_3 + \cdots + u_7$

$$S = (\text{le premier terme dans la somme})\frac{1 - \text{raison}^{(\text{le nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

$\text{le nombre de termes} = 7 - 0 + 1 = 8$

Donc : $S = u_0 \dfrac{1 - 2^8}{1 - 2} = 3\dfrac{1 - 256}{-1} = (-3) \times (-255) = 765$

Exercice13 : Déterminer les réel x ; y et z pour que :

→Les nombres : x ; y et z soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique

→ $x + y + z = 9$

→ $2x + y - z = 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : x ; y et z vérifient le système suivant :

$$\begin{cases}2y=x+z\\x+y+z=9\\2x+y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=x+z\\2y+y=9\\2x+y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=x+z\\3y=9\\2x+y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6=x+z\\y=3\\2x-z=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\\z=5\end{cases}$$

Donc : les termes de la suite sont : 1 ; 3 et 5

Donc : $5-3=\boxed{2=r}$

Exercice14 : 1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; Calculer en fonction de n la somme suivante :

$s_n=3+6+9+...+3(n-1)+3n$

2) Déterminer l'entier n tel que : $3+6+9+...+3(n-1)+3n=2583$

Solutions :1) On pose : $u_n=3n$

On a : $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r=u_{n+1}-u_n=3(n+1)-3n=3$

Donc : $s_n=3+6+9+...+3(n-1)+3n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\frac{n}{2}(u_1+u_n)$

Donc : $s_n=\frac{n}{2}(3+3n)=\frac{3n}{2}(1+n)$

2) Déterminons l'entier n tel que : $3+6+9+...+3(n-1)+3n=2583$

$3+6+9+...+3(n-1)+3n=2583\Leftrightarrow\frac{3n}{2}(1+n)=2583\Leftrightarrow n^2+n-1722=0$

On a : $\Delta=1+4\times1722=6889=83^2\succ0$

Donc : $n_1=\frac{-1+83}{2}=41$ ou $n_2=\frac{-1-83}{2}=-42\prec0$ (impossible car $n\in\mathbb{N}^*$)

Donc : $n=41$

Exercice15 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de termes strictement négatifs de raison q :

1) Déterminer le signe de q

2) Calculer : u_0 et u_1 si on a : $\begin{cases}u_0+u_1=-10\\u_0\times u_1=16\end{cases}$

3) Ecrire u_n en fonction de n

Solution : 1) Puisque : $u_n\prec0$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_{n+1}=qu_n$

Alors : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\succ0$

2)Calculons : u_0 et u_1

$$\begin{cases}u_0+u_1=-10\\u_0\times u_1=16\end{cases}$$

u_0 et u_1 Sont solutions de l'équation suivante : $X^2-sX+p=0$ c'est-à-dire : $X^2+10X+16=0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : après résolution on trouve : $X_1=-8$ et $X_2=-2$

Deux cas se présentent :

$\rightarrow u_0=-2$ et $u_1=-8$ alors : $q=\dfrac{u_1}{u_0}=4\succ 0$

Donc : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison : $q=4\succ 0$

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p\times q^{n-p}\Rightarrow u_n=u_0\times q^{n-0}=-2\times 4^n$

4) Calculons la somme : $S=u_1+u_2+\cdots+u_5$

$\rightarrow u_0=-8$ et $u_1=-2$ alors : $q=\dfrac{u_1}{u_0}=\dfrac{1}{4}\succ 0$

Donc : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison : $q=\dfrac{1}{2}\succ 0$

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p\times q^{n-p}\Rightarrow u_n=u_0\times q^{n-0}=-8\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

Exercice16 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{7u_n-25}{u_n-3} & ;\ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=2 \end{cases}$

1) Montrer que : $u_n\neq 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\dfrac{1}{u_n-5}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{7u_n-25}{u_n-3} & ;\ \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=2 \end{cases}$

1) Montrons que : $u_n\neq 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0=2\neq 5$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n\neq 5$

Montrons que : $u_{n+1}\neq 5$?

$u_{n+1}-5=\dfrac{7u_n-25}{u_n-3}-5=\dfrac{2(u_n-5)}{u_n-3}$ et comme : $u_n\neq 5$ c'est-à-dire : $u_n-5\neq 0$ alors ; $u_{n+1}-5\neq 0$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n\neq 5$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :

PROF. ATMANI NAJIB

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-5}=\frac{1}{\frac{7u_n-25}{u_n-3}-5}=\frac{u_n-3}{2\left(u_n-5\right)}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-3}{2\left(u_n-5\right)}-\frac{1}{u_n-5}=\frac{u_n-5}{2\left(u_n-5\right)}=\frac{1}{2}$$

Donc $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0=\frac{1}{2-5}=-\frac{1}{3}$

3) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0=-\frac{1}{3}$

Donc : $v_n=v_0+nr=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n$

4) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-5}$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{1}{v_n}+5$

Donc : $u_n=\frac{5v_n+1}{v_n}=\frac{5\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\right)+1}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n}=\frac{15n-4}{3n-2}$

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}$; Calculons : S_n en fonction de n

$$S_n=v_0+v_1+\ldots+v_{n-1}=n\frac{v_0+v_{n-1}}{2}$$

On a : $v_n=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n\Rightarrow v_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}(n-1)\Rightarrow v_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}$

Donc : $S_n=n\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}n-\frac{5}{6}}{2}=n\frac{\frac{1}{2}n-\frac{7}{6}}{2}=\frac{n(3n-7)}{12}$

Exercice17 : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0=0\end{cases}$

1) Calculer : u_1

2) Soit la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

c) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution : 1) Calculons : u_1

PROF: ATMANI NAJIB

$u_{0+1}=\frac{u_0-4}{u_0+6}\Rightarrow u_1=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

2) Soit la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Montrons que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

Soit : $n\in\mathbb{N}$; $v_{n+1}=\frac{1+u_{n+1}}{4+u_{n+1}}=\frac{1+\frac{u_n-4}{u_n+6}}{4+\frac{u_n-4}{u_n+6}}=\frac{2u_n+2}{5u_n+20}=\frac{2}{5}\left(\frac{u_n+1}{u_n+4}\right)=\frac{2}{5}v_n$

Donc : $v_{n+1}=\frac{2}{5}v_n$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc :la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{2}{5}=q$ et son premier terme : $v_0=\frac{1+u_0}{4+u_0}=\frac{1}{4}$

b) Déterminons v_n en fonction de n

Puisque : $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{2}{5}=q$ et son premier terme : $v_0=\frac{1}{4}$ alors :

$$\boxed{v_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Déterminons u_n en fonction de n :On a : $v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

$$v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}\Leftrightarrow v_n\left(4+u_n\right)=1+u_n\Leftrightarrow 4v_n+u_nv_n=1+u_n\Leftrightarrow 4v_n-1=u_n-u_nv_n$$

$$v_n=\frac{1+u_n}{4+u_n}\Leftrightarrow 4v_n-1=u_n\left(1-v_n\right)\Leftrightarrow u_n=\frac{4v_n-1}{1-v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{1-4v_n}{v_n-1}\Leftrightarrow\boxed{u_n=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}}$$

c) Calculons : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$ en fonction de n

$\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n=\left(\textit{le premier terme dans la somme}\right)\frac{1-\textit{raison}^{(\textit{le nombre de termes})}}{1-\textit{raison}}$

le nombre de termes $=n-0+1=n+1$

Donc : $S_n=v_0\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{4}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

Exercice18 : Suites géométriques

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

PROF: ATMANI NAJIB

1) Soit I_0 l'intensité d'un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0

2) On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la nième plaque.

a) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

b) Quelle est la nature de la suite I_n ?

Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et de I_0.

c) Quel est le sens de variation de I_n ?

3) Quelle est l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4) Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?

Solution : 1) La perte de 23 % correspond à $I_1 = I_0 - \frac{23}{100} I_0 = 0,77 I_0$.

2) a) A chaque passage l'intensité est multipliée par 0,77 : $I_n = 0,77 I_{n-1}$.

b) I_n est une suite géométrique de raison 0,77. On a $I_n = I_0 q^n = I_0 \left(0,77^n\right)$.

c) Comme $I_n = 0,77 I_{n-1} < I_{n-1}$, (I_n) est décroissante.

3) On cherche I_0 sachant que $I_4 = 15$: $I_4 = 15 = I_0 (0,77)^4 \Rightarrow I_0 = \frac{15}{0,77^4} \approx 42,67$.

4) On cherche n pour que $I_n \le \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow I_0 0,77^n \le 0,25 I_0 \Leftrightarrow 0,77^n \le 0,25$.

A la machine on a les résultats suivants :

n	I$_n$	n	I$_n$
0	1	9	0,09515169
1	0,77	10	0,0732668
2	0,5929	11	0,05641544
3	0,456533	12	0,04343989
4	0,35153041	13	0,03344871
5	0,27067842	14	0,02575551
6	0,20842238	15	0,01983174
7	0,16048523	16	0,01527044
8	0,12357363	17	0,01175824

Pour n=6 on est en dessous de 1/4.

Exercice19 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = 2 \ ; \ u_1 = \frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - \frac{1}{3^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $u_{n+1} = \frac{1}{9} u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \ \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) Ecrire v_n et u_n en fonction de n

PROF: ATMANI NAJIB

c) Calculer la somme : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Solution :1) Montrons par récurrence que : $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : n=0 : $u_1 = \frac{1}{9}u_0 + \frac{2}{3^{0+2}} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+3}}$??

On a: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$ donc $u_n = 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)$ et on a : $u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n)$

$$u_{n+2} = \frac{1}{27}\left(12u_{n+1} - 9\left(u_{n+1} - \frac{2}{3^{n+2}}\right)\right) = \frac{1}{27}\left(3u_{n+1} + \frac{2}{3^n}\right)$$

Donc : $u_{n+2} = \frac{1}{9}u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+2}}$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$

2)a) On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3^{n+1}}$ donc : $v_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} - \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\left(u_n - \frac{1}{3^n}\right)$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{9}v_n$ par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{9}$

et de premier terme $v_0 = 1$

2) b) Ecriture de v_n et u_n en fonction de n :

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{9}$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ et Puisque : $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$ donc $u_n = \left(\frac{1}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

2) c) $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$??

$u_n = v_n + w_n$ Avec $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites géométriques de raison : $q = \frac{1}{9}$ et $q' = \frac{1}{3}$

Donc : $s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} v_k + \sum_{k=0}^{k=n} w_k$

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = v_0 \frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{9}} + w_0 \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{8}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}\right) + \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{21}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice20 :1) On pose : $f(x) = \frac{x^2}{1-2x^2}\ : \forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Montrer que : $\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]\ ;\ 0 \prec \frac{x^2}{1-2x^2} \prec \frac{1}{2}$

2)On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $a \in \left]0;\frac{1}{4}\right]$: $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{1-2{u_n}^2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \prec u_n \prec \frac{1}{4}$

b) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} \le \frac{2}{7} u_n$

Solution :1) a) Montrons que : la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

On pose : $f(x) = \frac{x^2}{1-2x^2}\ : \forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$

Soient : $x_1 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $x_2 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$ et $x_1 \prec x_2$

$$0 \le x_1 \prec x_2 \Rightarrow (x_1)^2 \prec (x_2)^2 \Rightarrow -2(x_1)^2 + 1 \succ -2(x_2)^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{1-2(x_1)^2} \prec \frac{1}{1-2(x_2)^2} \Rightarrow -1 + \frac{1}{1-2(x_1)^2} \prec -1 + \frac{1}{1-2(x_2)^2}$$

$$0 \le x_1 \prec x_2 \Rightarrow f(x_1) \prec f(x_2)$$

Donc : la fonction f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$

b) Montrons que : $\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\ ;\ 0 \prec \frac{x^2}{1-2x^2} \prec \frac{1}{2}$

$\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\Rightarrow 0 \prec x \prec \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) \prec f(x) \prec f\left(\frac{1}{2}\right)$ et on a : $f(0) = \frac{0^2}{1-2\times 0^2} = 0$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{1-2\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Donc : $\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\ : 0 \prec \frac{x^2}{1-2x^2} \prec \frac{1}{2}$

2)On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $a \in \left]0;\frac{1}{4}\right]$: $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{1-2{u_n}^2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \prec u_n \prec \frac{1}{4}$

1étapes : n=0 : $u_0 = a \in \left]0;\frac{1}{4}\right]$ donc : $0 \prec u_0 \prec \frac{1}{4}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{4}$

3étapes : Montrons alors que : $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{4}$??

On a : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{4}$ et comme f est strictement croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ alors : $f(0) \prec f(u_n) \prec f\left(\frac{1}{4}\right)$

Donc : $0 \prec u_{n+1} \prec \frac{1}{14} \prec \frac{1}{4}$

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \prec u_n \prec \frac{1}{4}$

b) Montrons que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} - u_n = u_n\left(\frac{u_n}{1-2u_n^2} - 1\right) = \frac{2u_n(u_n+1)\left(u_n - \frac{1}{2}\right)}{1-2u_n^2}$

et comme : $0 \prec u_n$ et $0 \prec u_n + 1$ et $0 \prec 1 - 2u_n^2$ et $u_n - \frac{1}{2} \prec 0$

Alors : $u_{n+1} - u_n \prec 0$ Par conséquent (u_n) est strictement décroissante.

c) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - \frac{2}{7} = \frac{u_n^2}{1-2u_n^2} - \frac{2}{7} = \frac{7u_n^2 - 2 + 4u_n^2}{7(1-2u_n^2)} = \frac{11u_n^2 - 2}{7(1-2u_n^2)}$

et comme : $0 \prec u_n \prec \frac{1}{4}$ alors : $11u_n^2 - 2 \prec 0$ et $0 \prec 7(1-2u_n^2)$ donc : $\frac{11u_n^2 - 2}{7(1-2u_n^2)} \prec 0$

Donc : $u_{n+1} - \frac{2}{7} \prec 0$ par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad u_{n+1} \leq \frac{2}{7} u_n$

Exercice21 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 \in [0,1]$ et : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrer que :la suite (u_n) est croissante.

3) On pose : $u_0 = \cos\theta$ avec : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Montrer que : $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Solution : 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad 0 \leq u_n \leq 1$

1étapes : n=0 : $u_0 \in [0,1]$ donc : $0 \leq u_0 \leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$

3étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$??

On a : $0 \le u_n \le 1 \Leftrightarrow 1 \le u_n + 1 \le 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{u_n+1}{2} \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}} \le \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \le 1 \Rightarrow 0 \le u_{n+1} \le 1$

Par suite : $0 \le u_{n+1} \le 1$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \le u_n \le 1$

2) Montrons que :la suite (u_n) est croissante.

On a : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n\right)}{\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n} = \frac{\frac{u_n+1}{2} - (u_n)^2}{\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n} = \frac{-2(u_n)^2 + u_n + 1}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n\right)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2(u_n)^2 + u_n + 1}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n\right)} = \frac{-(u_n - 1)(2u_n + 1)}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n\right)} = \frac{(1 - u_n)(2u_n + 1)}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n\right)}$$

Comme : $0 \le u_n \le 1$ alors : $\frac{2u_n+1}{2\left(\sqrt{\frac{u_n+1}{2}} + u_n\right)} \ge 0$ et $1 - u_n \ge 0$

Alors : $u_{n+1} - u_n \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est croissante.

3) On pose : $u_0 = \cos\theta$ avec : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Montrons par récurrence que : $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : n=0 : $u_0 = \cos\theta \ \ et \ \cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = \cos\theta$

Donc : la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$??

On a : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)+1}{2}}$ et on sait que : $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$

Alors : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right|$ et comme : $0 \le \frac{\theta}{2^{n+1}} \le \frac{\pi}{2}$

Donc : $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

ATMANI NAJIB

PROF

Exercice22 : (6pts) : Devoir $(0,5\text{pts}+1,5\text{pts}+1,5\text{pts}+0,5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts})$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{2-u_n}} \\ u_0 = \dfrac{2}{9} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $0 \prec u_n \prec 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \prec 1$ et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{3}{4}$ et en déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n \le \dfrac{2}{9}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB