1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°3 : *LES SUITES NUMERIQUES*

PROF. ATMANI NAJIB

Exercice1 : Soit $(u_n)_n$ la suite définie par : $u_n = 3n^2 - 2n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : les quatre 1ere termes de la suite $(u_n)_n$

2) Calculer en fonction de n les termes suivants : u_{n+1} ; u_{n-1} ; u_{2n} ; u_{2n+1}

3) Calculer en fonction de n : $u_{n+1} - u_n$

Solution : 1) $u_0 = 3\times 0^2 - 2\times 0 + 4 = 4$

$u_1 = 3\times 1^2 - 2\times 1 + 4 = 5$

$u_2 = 3\times 2^2 - 2\times 2 + 4 = 12$

$u_3 = 3\times 3^2 - 2\times 3 + 4 = 25$

2) $u_{n+1} = 3(n+1)^2 - 2(n+1) + 4 = 3n^2 + 6n + 3 - 2n - 2 + 4 = \boxed{3n^2 + 4n + 7}$

$u_{n-1} = 3(n-1)^2 - 2(n-1) + 4 = 3n^2 - 6n + 3 - 2n + 2 + 4 = \boxed{3n^2 - 8n + 9}$

$u_{2n} = 3(2n)^2 - 2(2n) + 4 = \boxed{12n^2 - 4n + 4}$

$u_{2n+1} = 3(2n+1)^2 - 2(2n+1) + 4 = 12n^2 + 12n + 3 - 4n - 2 + 4 = \boxed{12n^2 + 8n + 5}$

3) $u_{n+1} - u_n = (3n^2 + 4n + 7) - (3n^2 - 2n + 4) = 3n^2 + 4n + 7 - 3n^2 + 2n - 4$

$u_{n+1} - u_n = \boxed{6n + 3}$

Exercice2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3 \\ u_0 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n + \beta$: $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3

2) Déterminer β sachant que : $v_{n+1} = 2v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Solution : 1) Pour n=0 on a: $u_{0+1} = 2u_0 + 3 = 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) + 3 \Rightarrow \boxed{u_1 = 2}$

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = 2u_1 + 3 = 2\times 2 + 3 \Rightarrow \boxed{u_2 = 7}$

Pour n=2 on a : $u_{2+1} = 2u_2 + 3 = 2\times 7 + 3 \Rightarrow \boxed{u_3 = 17}$

2) Soit : $n \in \mathbb{N}$
On a : $v_n = u_n + \beta$: $\forall n \in \mathbb{N}$ donc : $v_n - \beta = u_n$

$v_{n+1} = u_{n+1} + \beta = 2u_n + 3 + \beta = 2(v_n - \beta) + 3 + \beta = 2v_n - 2\beta + 3 + \beta = 2v_n - \beta + 3$

$v_{n+1} = 2v_n \Leftrightarrow -\beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 3}$

Exercice3 : Soit $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2) Montrer que $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3) Que peut-on déduire ?

Solution :1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 0\leq v_n$??

$v_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ (Le conjugué)

$v_n=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq 0$

Donc : $0\leq v_n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est minorée par 0

2) Montrons que : $v_n\leq\frac{1}{2}$?? $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$v_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}=\frac{2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

On a : $n\geq 1$ et $n+1\geq 2$ donc $\sqrt{n}\geq 1$ et $\sqrt{n+1}\geq\sqrt{2}$

Donc : $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 1+\sqrt{2}$ donc $-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\leq -1-\sqrt{2}$

donc $2-\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\leq 1-\sqrt{2}$ et puisque : $1-\sqrt{2}\prec 0$

Donc $v_n-\frac{1}{2}\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc $v_n\prec\frac{1}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc : la suite $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3) Donc : la suite $\left(v_n\right)_{n\geq 1}$ est bornée car :

$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : 0<v_n<\frac{1}{2}$

Exercice4 : Soit la suite récurrente $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=u_n{}^2+4u_n+6\\ u_0=3\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer u_1

2) Montrer que : $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

Solution :1) On a : $\begin{cases}u_{n+1}=u_n{}^2+4u_n+6\\ u_0=3\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ donc :

$n=0\Rightarrow u_{0+1}=u_0{}^2+4u_0+6\Rightarrow \boxed{u_1=3^2+4\times 3+6=27}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : 2\leq u_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0=3$ donc $2\leq u_0$.

PROF: ATMANI NAJIB

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : d'hérédité

Soit : $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $2 \leq u_n$

Montrons alors que : $2 \leq u_{n+1}$??

On a : $u_{n+1} - 2 = u_n^2 + 4u_n + 6 - 2 = u_n^2 + 4u_n + 4 = (u_n + 2)^2 \geq 0$

Donc : $2 \leq u_{n+1}$

Donc : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 2 \leq u_n$

Par suite : La suite est minorée par 2

Exercice5 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Montrer que : la suite (u_n) est majorée par 1

3) Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Solutions : 1) Montrons que $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $0 \leq u_0$ car : $0 \leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $0 \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1}$??

On a : $0 \leq u_n$ donc : $0 \leq u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}}$

Donc : $1 \leq u_{n+1}$

Donc : $0 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est minorée par 0

2) Montrons que : $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $u_0 \leq 1$ car : $1 \leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $u_n \leq 1$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq 1$??

On a : $u_n \leq 1$ donc : $u_n + 1 \leq 2 \Rightarrow \dfrac{u_n + 1}{2} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{u_n + 1}{2}} \leq \sqrt{1} \Rightarrow u_{n+1} \leq 1$

Donc : $u_{n+1} \leq 1$

Donc : : $u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est majorée par 1

3) la suite (u_n) est majorée par 1 et minorée par 0 donc (u_n) est bornée

Exercice6 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{5n - 3}{2n + 7} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minoré

PROF:ATMANI NAJIB

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5(n+1)-3}{2(n+1)+7}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{5n+2}{2n+9}-\frac{5n-3}{2n+7}=\frac{(5n+2)(2n+7)-(2n+9)(5n-3)}{(2n+9)(2n+7)}=\frac{41}{(2n+9)(2n+7)}\succ 0$$

Car : $(2n+9)(2n+7)\succ 0$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Puisque : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante : $u_0\le u_n\ \forall n\in\mathbb{N}$ et comme : $u_0=\frac{5\times 0-3}{2\times 0+7}=-\frac{3}{7}$

Alors : $-\frac{3}{7}\le u_n$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minoré par $-\frac{3}{7}$

Exercice7 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=2n^2-7n+3$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}$ on a : $u_{n+1}-u_n=2(n+1)^2-7(n+1)+3-(2n^2-7n+3)$

$u_{n+1}-u_n=2(n^2+2n+1)-7n-7+3-2n^2+7n-3=2n^2+4n+2-7n-7+3-2n^2+7n-3$

Donc : $u_{n+1}-u_n=4n-3$

On a : $n\ge 1\Rightarrow 4n\ge 4\Rightarrow 4n-3\ge 1$

Donc : $u_{n+1}-u_n\ge 1$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc : $u_{n+1}-u_n\succ 0$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante

Exercice8 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n\,!}$

Etudier la monotonie des suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solution : a) $u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k\,!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}=\frac{1}{(n+1)!}\succ 0$

Donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}-u_n-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{(n+1)}{(n+1)!}=\frac{1-n}{(n+1)!}\le 0 \text{ car : } n\ge 1$$

Donc : (v_n) est décroissante.

Exercice9 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_0=-5$ et $u_{10}=25$

Et Soit la suite $(v_n)_n$ géométrique tel que : $v_0=3$ et $v_2=12$

1) a) Déterminer la raison de la suite $(u_n)_n$

b) Calculer : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

2) a) Déterminer q la raison de la suite $(v_n)_n$ sachant que : $q\succ 0$

b) Ecrire v_n en fonction de n

Solution :1) a) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que : $u_0=-5$ et $u_{10}=25$

Donc : $u_n=u_p+(n-p)r$

On pose : n=10 et p=0

Donc : $u_{10}=u_0+(10-0)r$

Donc : $25=-5+10r$

Donc : $25+5=10r$

Donc : $30=10r$

Donc : $r=\frac{30}{10}=3$

b) Calcul de la somme suivante : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :$S=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

Donc : $S=11\frac{-5+25}{2}=11\frac{20}{2}=11\times10=110$

2) a) Puisque $(v_n)_n$ est géométrique tel que : $v_0=3$ et $v_2=12$

Alors on a : $v_n=v_p\times q^{n-p} \quad \forall(n;p)\in\mathbb{N}^2$

Pour p=0 et n=2 On a :$v_2=v_0\times q^{2-0}$

Donc : $12=3\times q^2$

Donc : $\frac{12}{3}=q^2$

Donc : $q^2=4$

Donc : $q=\sqrt{4}$ *ou* $q=-\sqrt{4}$ or $q\succ0$

Donc : $q=\sqrt{4}=2$

b) Puisque $(v_n)_n$ est géométrique

Alors on a : $v_n=v_0\times q^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $v_n=3\times2^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice10 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_1=5$ et $u_2=10$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q=2$

2) Calculer u_3

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer u_{15} sachant que : $2^{14}=16384$

5) Calculer : $S=u_1+u_2+\cdots+u_n$ en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(u_n)_n$

Donc :$u_2=qu_1$

Donc :$10=q\times5$ Donc :$q=\frac{10}{5}=2$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

2) On a : $u_3 = qu_2$

Donc : $u_3 = 2\times 10 = 20$

3) u_n en fonction de n ?

Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

Donc : $u_n = 5\times 2^{n-1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

4) On a : $u_n = 5\times 2^{n-1}$ donc : $u_{15} = 5\times 2^{15-1} = 5\times 2^{14} = 5\times 16384 = 81920$

5) Calcul de : $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$$le\ nombre\ de\ termes = n-1+1 = n$$

$$S = u_1\frac{1-2^n}{1-2} = 5\frac{1-2^n}{-1} = -5(1-2^n) = -5+5\times 2^n$$

Exercice11 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 tel que :

$\begin{cases} u_0 - u_4 = 6 \\ 2u_0 + u_4 = 3 \end{cases}$ 1) Calculer : u_0 et u_4

2) Calculer la raison r de cette suite

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{49}$

Solution : 1) Calculons : u_0 et u_4

On a : $\begin{cases} u_0 - u_4 = 6\ (1) \\ 2u_0 + u_4 = 3\ (2) \end{cases}$ Donc : $(1)+(2) \Rightarrow 3u_0 = 9 \Rightarrow u_0 = 3$

$2u_0 + u_4 = 3 \Rightarrow u_4 = 3 - 2u_0 \Rightarrow u_4 = 3 - 2\times 3 = -3$

Donc : $u_0 = 3$ et $u_4 = -3$

1) La raison r ??

On a : $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n = u_p + (n-p)r$

Pour n= 4 et p = 0 on a : $u_4 = u_0 + 4r$

$$u_4 = u_0 + 4r \Leftrightarrow -3 = 3 + 4r \Leftrightarrow -6 = 4r \Leftrightarrow -\frac{6}{4} = r \Leftrightarrow \boxed{r = -\frac{3}{2}}$$

3) Ecriture de u_n en fonction de n

On a : $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n = u_p + (n-p)r$

Donc : $u_n = u_0 + (n-0)r \Leftrightarrow \boxed{u_n = 3 - \frac{3}{2}n}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n = 3 - \frac{3}{2}n$

PROF: ATMANI NAJIB

4) Calculons la somme : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{49}$

$(u_n)_n$ est une suite arithmétique donc : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{49}=(49-0+1)\frac{u_0+u_{49}}{2}=50\frac{3+u_{49}}{2}$

Comme on a : $u_{49}=3-\frac{3}{2}\times 49=-\frac{141}{2}$

Donc : $S=\frac{50}{2}\left(3-\frac{141}{2}\right)=\boxed{-\frac{3375}{2}}$

Exercice12 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=0$ et : $u_{n+1}=u_n+4+4\sqrt{u_n+1}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\geq 0$

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\sqrt{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Calculer : v_0

b) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

c) Ecrire v_n en fonction de n

d) En déduire u_n en fonction de n

e) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$; Calculer : S_n en fonction de n

Solution :1) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\geq 0$

1étapes : n=0 : $u_0=0$ et $0\geq 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n\geq 0$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\geq 0$??

On a : donc : $u_n+4\geq 4\geq 0$ et $4\sqrt{u_n+1}\succ 0$ Par suite : $u_{n+1}\geq 0$

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n\geq 0$

2) a) Calculons : v_0 : Pour n=0 on a : $v_0=\sqrt{u_0+1}=0\Rightarrow v_0=1$

b) Montrons que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique : $v_n=\sqrt{u_n+1}$

$$v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}+1}=\sqrt{u_n+4+4\sqrt{u_n+1}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{u_n+1}\right)^2+2\times2\sqrt{u_n+1}+2^2}=\sqrt{\left(\sqrt{u_n+1}+2\right)^2}=\sqrt{u_n+1}+2$$

$$v_{n+1}-v_n=\sqrt{u_n+1}+2-\sqrt{u_n+1}=2$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme : $v_0=1$

c) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=2$ et de premier terme : $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0+nr=\boxed{1+2n}$

d) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n=\sqrt{u_n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ c'est-à-dire : $u_n+1=v_n{}^2$

Donc : $u_n=v_n{}^2-1=(1+2n)^2-1=\boxed{4n^2+4n}$

5) On pose : $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$; Calculons : S_n en fonction de n

PROF. ATMANI NAJIB

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (n+1)\frac{v_0+v_n}{2} = (n+1)\frac{1+1+2n}{2} = (n+1)^2$$

Exercice13 : Déterminer parmi les *suites suivantes celle qui est* géométrique :

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^n$

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par :* $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $v_n = 2\times 5^{n-2} - 3\times 5^n + 4\times 5^{n-1}$

3) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $\forall n\in\mathbb{N}$; $w_n = (n+1)^2$

Solution :1) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_n = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^n$

$$u_{n+1} = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^{n+1} = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^n \times \left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)\times u_n = q\times u_n$$

Donc : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = -\frac{5}{2}$ et de premier terme : $u_0 = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^0 = 4$

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $v_n = 2\times 5^{n-2} - 3\times 5^n + 4\times 5^{n-1}$

$v_n = \left(2 - 3\times 5^2 + 20\right)\times 5^{n-2} = -53\times 5^{n-2}$

$v_{n+1} = -53\times 5^{n-1} = \left(-53\times 5^{n-2}\right)\times 5 = 5v_n$

Donc : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=5$ et de premier terme : $v_1 = 4\left(-\frac{5}{2}\right)^1 = -10$

3)Méthode1 : On a : $w_n = (n+1)^2$ et $w_0 = (0+1)^2 = 1$ et $w_1 = (1+1)^2 = 4$ et $w_2 = (2+1)^2 = 9$

Ainsi : $\frac{w_1}{w_0} = \frac{4}{1} = 4$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{9}{4} = 2,5$ c'est-à-dire : $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$

Donc : La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas géométrique

Méthode2 : $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 = \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2 \neq constante$

Donc : La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas géométrique

Exercice14 : Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_{n+1} = 3^{2n+1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 ; u_2 ; u_3

2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et que peut-on déduire ?

Solution : On a : $u_{n+1} = 3^{2n+1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB

Pour n=0 on a : $u_{0+1}=3^{2\times 0+1}=3^1 \Rightarrow u_1=3$

Pour n=1 on a : $u_{1+1}=3^{2\times 1+1}=3^3 \Rightarrow u_2=27$

Pour n=2 on a : $u_{2+1}=3^{2\times 2+1}=3^5 \Rightarrow u_3=243$

2) Déterminons u_n en fonction de n

On a : $u_{n+1}=3^{2n+1}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

On remplace : n par $n-1$ on trouve : $u_{n-1+1}=3^{2(n-1)+1}=3^{2n-2+1} \Rightarrow \boxed{u_n=3^{2n-1}}$

3) Calculons : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}}=3^{2n+1-2n+1}=3^2=9=constante$

Donc : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=9$

Exercice15 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_1=\frac{3}{2}$ et $u_4=\frac{3}{16}$

1) Déterminer sa raison q

2) Ecrire u_n en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a :: $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=q^{n-p}u_p$

Pour n= 4 et p=1 on a : $u_4=q^{4-1}u_1$

Donc : $\frac{3}{16}=q^3\frac{3}{126} \Leftrightarrow q^3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow q=\frac{1}{2}$

2) u_n en fonction de n ?

$$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times u_1 \Leftrightarrow u_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Exercice16 : Déterminer le réel x pour que les nombres : $(1+x^2)$; $(3+x)$ et 10 soient les termes consécutifs d'une suite géométrique dans cet ordre et déterminer sa raison.

Solution : $(1+x^2)$; $(3+x)$ et 10 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique si et seulement si $(3+x)^2=10\times(1+x^2)$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9=10x^2+10 \Leftrightarrow 9x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow (3x-1)^2=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Donc : les termes sont : $\frac{10}{9}$ et $\frac{10}{3}$ et 10 donc : $q=\frac{10/3}{10/9}=3$

Exercice17 : 1) Calculer en fonction de n la somme suivante : $s_n=1+3+9+27+\ldots+3^n$

2) Déterminer n tel que : $s_n=1093$

Solutions :1) On pose : $u_n=3^n$ on a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q=3$ Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=3$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $s_n = 1+3+9+27+\ldots+3^n = 3^0+3^1+3^2+3^2+\ldots+3^n = 1\dfrac{1-3^{n-0+1}}{1-3} = -\dfrac{1}{2}\left(1-3^{n+1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right)$

2) Déterminons n tel que : $s_n = 1093$

$s_n = 1093 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(3^{n+1}-1\right) = 1093 \Leftrightarrow 3^{n+1}-1 = 2086 \Leftrightarrow 3^{n+1} = 2087 = 3^7 \Leftrightarrow n+1 = 7 \Leftrightarrow \boxed{n=6}$

Exercice18 : Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Solution : Les nombres de centimes à payer chaque jour sont les termes d'une suite géométrique de 20 termes dont le premier est : $u_1 = 1$ et et la raison $q = 2$

$u_2 = 2$ (La somme à donner le 2 iem jour) ....

$u_{20} = \ldots$ (La somme à donner le 20e jour)

Donc : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$

$u_{20} = 2^{20-1} = 2^{19} = 524288$ Centimes

La somme totale à payer serait : $s_{20} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{20} = u_1 \dfrac{1-2^{20-1+1}}{1-2}$

$s_{20} = 2^{20} - 1 = 10485.75$ Centimes : $s_{20} \simeq 1 million$ 500dh Joli voyage !

Exercice19 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{9u_n}{4u_n+3} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 et u_2

2) Montrer que $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 2 - \dfrac{3}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

c) On pose : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$; Calculer : S_n en fonction de n

d) Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Solution : 1) Calculons : u_1 et u_2

$u_{0+1} = \dfrac{9u_0}{4u_0+3} \Rightarrow u_1 = \dfrac{9}{10}$ et $u_{1+1} = \dfrac{9u_1}{4u_1+3} \Rightarrow u_1 = \dfrac{27}{22}$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Montrons par récurrence que : $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = \frac{1}{2} \neq 0$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \neq 0$

Montrons que : $u_{n+1} \neq 0$?

On a : $u_n \neq 0$ donc : $\frac{9u_n}{4u_n+3} \neq 0$ donc $u_{n+1} \neq 0$

Donc : $u_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

Soit : $n \in \mathbb{N} \quad ; v_{n+1} = 2 - \frac{3}{u_{n+1}} = 2 - 3 \times \frac{4u_n+3}{9u_n} = 2 - \frac{4u_n+3}{3u_n} = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{3}{u_n}\right)$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$

Donc :la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = 2 - \frac{3}{u_0} = -4$

b) Déterminons v_n en fonction de n :

Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $\frac{1}{3} = q$ et son premier terme : $v_0 = -4$ alors :

$$\boxed{v_n = -4\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

Déterminons u_n en fonction de n :

On a : $v_n = 2 - \frac{3}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc : $\frac{3}{u_n} = 2 - v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{2 - v_n}$

Par suite : $\boxed{u_n = \frac{3}{2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n}}$

c) Calculons : $S_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n = (\textit{le premier terme dans la somme}) \frac{1 - raison^{(\textit{le nombre de termes})}}{1 - raison}$

$\textit{le nombre de termes} = n - 1 + 1 = n$

Donc : $S_n = v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

2) a) Etude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$v_{n+1} - v_n = qv_n - v_n = v_n(q-1) = -4\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n \succ 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice20 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+2} \\ u_0 = 1 \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 et u_2

2) On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

2) Ecrire v_n en fonction de n

3) En déduire u_n en fonction de n

Solution :1) On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+2}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a : $u_{0+1} = \sqrt{u_0^2+2} \Rightarrow u_1 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

Pour n=1 on a : $u_{1+1} = \sqrt{u_1^2+2} \Rightarrow u_2 = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$

2) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = \left(\sqrt{u_n^2+2}\right)^2 - u_n^2 = u_n^2 + 2 - u_n^2 = \boxed{2 = r}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = u_0^2 = 1$

3) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc : $v_n = v_0 + nr = 1 + n\times 2 = 1 + 2n$

3) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n = u_n^2$ et $u_n \geq 0$ donc $\boxed{u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1+2n}}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice21 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n) \\ u_0 = \frac{1}{2} ;\ u_1 = 7 \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n}{2^n}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_2

2) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison r et son premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) En déduire u_n en fonction de n

5) Calculer la somme suivante : $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ en fonction de n

Solution :1) On a : $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$: $\forall n\in\mathbb{N}$

n=0 : $u_{0+2} = 4(u_{0+1} - u_0) \Rightarrow u_2 = 4(u_1 - u_0) \Rightarrow u_2 = 4\left(7 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{u_2 = 26}$

2) Pour montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique ils suffit de montrer que :

PROF: ATMANI NAJIB

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad 2v_{n+1} = v_n + v_{n+2}$

$$v_n + v_{n+2} = \frac{u_n}{2^n} + \frac{u_{n+2}}{2^{n+2}} = \frac{u_n}{2^n} + \frac{4(u_{n+1} - u_n)}{2^{n+2}} = \frac{4u_n + 4(u_{n+1} - u_n)}{2^{n+2}} = \frac{4u_n + 4u_{n+1} - 4u_n}{2^{n+2}} = \frac{4u_{n+1}}{2^{n+2}}$$

Donc : $v_n + v_{n+2} = 2\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} = 2v_{n+1}$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{2^0} = \frac{1}{2}$

La raison de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : $r = v_1 - v_0 = \frac{u_1}{2^1} - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$

3) Ecriture de v_n en fonction de n :

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$

Donc : $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + 3n$

4) Ecriture de u_n en fonction de n :

Puisque : $v_n = \frac{u_n}{2^n}$ Alors : $u_n = 2^n v_n$ donc $\boxed{u_n = 2^n\left(\frac{1}{2} + 3n\right)}$: $\forall n \in \mathbb{N}$

5) Calculons la somme suivante : $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ en fonction de n

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Donc : $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = (n - 0 + 1)\frac{v_0 + v_n}{2} = \boxed{\frac{(n+1)(3n+1)}{2}}$

Exercice22 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9 + u_n^4}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Soit la fonction f tel que : $f(x) = \frac{12x}{9 + x^4}$

On suppose que : f est croissante sur $\left[-\sqrt{\sqrt{3}}; \sqrt{\sqrt{3}}\right]$ et f est décroissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\sqrt{3}}\right]$ et $\left[\sqrt{\sqrt{3}}; +\infty\right[$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $1 \le u_n \le \sqrt{\sqrt{3}}$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

2) On pose : $v_n = \frac{u_n}{n!} + \sqrt{\sqrt{3}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{2}{9 + u_n^4} \le \frac{1}{5}$ et en déduire La monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Solution : On a : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9 + u_n^4}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}\quad 1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$?

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}\ ;\ 1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

n=1 $u_1=1$ donc : $1\le u_1\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Supposons que : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Montrons que : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{\sqrt{3}}$

On a : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$ et puisque : f est croissante sur : $I=\left[1;\sqrt{\sqrt{3}}\right]$

On a : $f(1)\le f(u_n)\le f\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)$ donc $\frac{6}{5}\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Donc : $1\le u_{n+1}\le\sqrt{\sqrt{3}}\quad\forall n\in\mathbb{N}^{*}$

b) Etudions la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$?

$u_{n+1}-u_n=\frac{12u_n}{9+u_n^4}-u_n=u_n\left(\frac{12}{9+u_n^4}-1\right)=u_n\left(\frac{3-u_n^4}{9+u_n^4}\right)$ et puisque : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}$

Donc : $0\prec u_n$ et $3-u_n^4\ge0$ et $9+u_n^4\succ0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\ge0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ est croissante

2) $v_n=\frac{u_n}{n!}+\sqrt{\sqrt{3}}\quad ;\ \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

a) Vérifions que : $\forall n\in\mathbb{N}^{*}\quad\frac{2}{9+u_n^4}\le\frac{1}{5}$?

On a : $1\le u_n\le\sqrt{\sqrt{3}}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^{*}$ donc : $1^4\le u_n^4\le\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^4$ donc : $1\le u_n^4\le3$

Donc : $10\le u_n^4+9$ par suite : $\frac{2}{9+u_n^4}\le\frac{1}{5}$

Déduction de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$?

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{u_n}{n!}=\frac{u_{n+1}}{n!(n+1)}-\frac{u_n}{n!}=\frac{1}{n!}\left(\frac{u_{n+1}}{(n+1)}-u_n\right)=\frac{1}{n!}u_n\left(\frac{12}{(n+1)(9+u_n^4)}-1\right)$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n}{(n+1)!}\left(\frac{12}{9+u_n^4}-(n+1)\right)$ et puisque : $\frac{u_n}{(n+1)!}\succ0$ et $\frac{12}{9+u_n^4}\le\frac{6}{5}\ \ \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

Alors : $v_{n+1}-v_n\le\frac{u_n}{(n+1)!}\left(-n+\frac{1}{5}\right)$ et puisque : $-n+\frac{1}{5}\le0\ \ \forall n\in\mathbb{N}^{*}$

Alors : $v_{n+1}-v_n\le0$ donc : (v_n) est décroissante.

Exercice23 : Devoir (7pts) : $(1\text{pts}+0{,}5\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+1\text{pts}+0{,}5\text{pts}+1\text{pts}+0{,}5\text{pts})$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{11u_n+4}{1-4u_n}\\ u_0=-\frac{3}{2}\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Montrer que : $-2 \prec u_n \prec -\frac{1}{2}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n - u_{n+1} = \frac{2(u_n+2)(2u_n+1)}{4u_n-1}$

b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) On pose : $v_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ et $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k+2}$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = 3$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = -2 + \frac{3}{2+4\times 3^n}$

---

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $s_n = \frac{2}{3}\left(n+3^{n+1}\right)$

4)a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} + 2 = \frac{3}{1-4u_n}(u_n+2)$

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} + 2 \le \frac{3}{7}(u_n+2)$

c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} + 2 \le \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{7}\right)^n$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB