# 1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
# 1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
# Correction série N°4 : *LES SUITES NUMERIQUES*

PROF: ATMANI NAJIB

**Exercice1 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 6u_n + 12 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer $u_1$

2) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 3

**Solution :1)** On a : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n^{\ 2} + 6u_n + 12 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $n = 0 \Rightarrow u_{0+1} = u_0^{\ 2} + 6u_0 + 12 \Rightarrow \boxed{u_1 = 4^2 + 6\times 4 + 12 = 52}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 3 \le u_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0 = 4$ donc $3 \le u_0$.
Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : d'hérédité

Soit : $n \in \mathbb{N}$ ; Supposons que : $3 \le u_n$

Montrons alors que : $3 \le u_{n+1}$??

On a : $u_{n+1} - 3 = u_n^{\ 2} + 6u_n + 12 - 3 = u_n^{\ 2} + 6u_n + 9 = (u_n + 3)^2 \ge 0$

Donc : $3 \le u_{n+1}$

Donc : D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \ : 3 \le u_n$
Par suite : La suite est minorée par 3

**Exercice2 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Solutions :**1) Montrons que $2 \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ????

1étapes : n=0 on a : $2 \le u_0$ car $2 < 3$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $2 \le u_n$

3étapes : Montrons alors que : $2 \le u_{n+1}$ ??

$$u_{n+1} - 2 = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} - 2 = \frac{8(u_n - 1) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{6u_n - 12}{u_n + 2}$$

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$ et puisque on a : $2 \le u_n$

Donc : $u_n-2\geq 0$ et $u_n+2>0$

Donc : $u_{n+1}-2\geq 0$

Donc : $2\leq u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrons que $u_n\leq 4 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ????

1étapes : n=0 on a : $u_0\leq 4$ car $3<4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que: $u_n\leq 4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\leq 4$ ??

$$4-u_{n+1}=4-\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{4(u_n+2)-8(u_n-1)}{u_n+2}=\frac{-4u_n+16}{u_n+2}$$

$4-u_{n+1}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}=\frac{4(4-u_n)}{u_n+2}$ et puisque on a : $u_n\leq 4$

Donc : $4-u_n\geq 0$ et $u_n+2>0$

Donc $u_{n+1}\leq 4$ par suite $u_n\leq 4 \ \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-u_n=\frac{8(u_n-1)-u_n(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{-u_n^2+6u_n-8}{u_n+2}$

On va factoriser $-u_n^2+6u_n-8$ : $\Delta=36-32=4>0$

$x_1=\frac{-6+2}{-2}=2$ et $x_2=\frac{-6-2}{-2}=4$ donc : $-u_n^2+6u_n-8=-(u_n-2)(u_n-4)$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}$ Or on a : $u_n\geq 2$ et $u_n\leq 4$

Donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{-(u_n-2)(u_n-4)}{u_n+2}\geq 0$ par suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

**Exercice3 :** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n=\frac{2n+3}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

**Solutions :** Montrons que : $u_{n+1}-u_n\leq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{2(n+1)+3}{n+1+2}\right)-\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)=\left(\frac{2n+5}{n+3}\right)-\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)=\frac{(2n+5)(n+2)-(2n+3)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2n^2+5n+4n+10-2n^2-6n-3n-9}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{(n+3)(n+2)}\succ 0 \text{ car : } (n+3)(n+2)\succ 0$$

Donc : $u_{n+1}-u_n\succ 0$ donc $u_{n+1}\succ u_n$ : $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

PROF: ATMANI NAJIB

**Exercice4 :** Soit les suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1} \quad \text{et } v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie des suite $(u_n)$ et $(v_n)$

**Solution :** a) $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\succ 0$$

Donc : $(u_n)$ est croissante.

b) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\prec 0$

Donc : $(v_n)$ est décroissante.

**Exercice5 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+1} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=1 \end{cases}$

1) Montrer que : $1\le u_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

**Solutions :**1) a) Montrons que $1\le u_n$ $1\le 1$car $1\le u_0$: n=0 on a étape1 : $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étape : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $1\le u_n$

3étape : Montrons alors que : $1\le u_{n+1}$ ??

$$u_{n+1}-1=\frac{2u_n+1}{u_n+1}-1=\frac{2u_n+1-(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{u_n}{u_n+1}$$

Et puisque on a : $1\le u_n$ alors $0\le u_n$ et $u_n+1>0$

Donc : $u_{n+1}-1\ge 0$ Par suite : $1\le u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrons que $u_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ????

1étapes : n=0 on a : $u_0\le 2$ car $1<2$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $u_n\le 2$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le 2$ ??

$$2-u_{n+1}=2-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{2(u_n+1)-2u_n-1}{u_n+1}=\frac{1}{u_n+2}\ge 0$$

Donc $u_{n+1}\le 2$ par suite $u_n\le 2 \ \forall n\in\mathbb{N}$

Conclusion : $1\le u_n\le 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+1}{u_n+1}-u_n=\frac{2u_n+1-u_n(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{-u_n^2+u_n+1}{u_n+1}$ On va factoriser $-u_n^2+u_n+1$ : $\Delta=1+4=5>0$

PROF: ATMANI NAJIB

$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{-2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\simeq -0.61$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\simeq 1.61$

Donc :

| $x$ | $-\infty$ |  | $x1$ |  | $x2$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(x)$ |  | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |  |

On a : $1\le u_n\le 2\quad \forall n\in\mathbb{N}$ et on a aussi : $1\le x_2\le 2$

Donc : $-u_n^2+u_n+1=-(u_n-x_1)(u_n-x_2)$

$1\le u_n\Rightarrow x_1\le u_n\Rightarrow 0\le u_n-x_1$

Montrons que : $u_n\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ :

1étapes : n=0 on a : $u_0\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car $1<1.61$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $u_n\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1}\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ??

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}-u_{n+1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2u_n+1}{u_n+1}=\frac{(1+\sqrt{5})(u_n+1)-2u_n-1}{u_n+1}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}-u_{n+1}=\frac{u_n+1+\sqrt{5}u_n+\sqrt{5}-2u_n-1}{u_n+1}=\frac{\sqrt{5}(u_n-1)+\sqrt{5}}{u_n+1}\ge 0$$

Car $1\le u_n$ Donc : $u_{n+1}\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Par suite $u_n\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}$

Conclusion : $-u_n^2+u_n+1=-(u_n-x_1)(u_n-x_2)\ge 0$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

**Exercice6 :** Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison $r$ tel que $u_{10}=35$ et $u_6=23$

Et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $v_n=2^{u_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Vérifier que la raison $r$ de cette suite est 3 et que : $u_0=5$

2) Calculer la somme suivante : $S=u_{1996}+u_{1997}+\cdots+u_{2013}$

3) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=8$

**Solution :**1) la raison $r$ ??

On a : $\forall(n;p)\in\mathbb{N}^2\quad u_n=u_p+(n-p)r$

Pour n= 10 et p=6 on a : $u_{10}=u_6+(10-6)r$

Donc : $u_{10}=u_6+4r$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $35 = 23 + 4r \Leftrightarrow 4r = 35 - 23 \Leftrightarrow 4r = 12 \Leftrightarrow r = \frac{12}{4} = 3$

On a : $u_n = u_0 + nr$ donc : $u_6 = u_0 + 6r$

Donc : $23 = u_0 + 6 \times 3$

Donc : $23 - 18 = u_0$

Donc : $u_0 = 5$

2) Calcul de la somme suivante : $S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 5$ et sa raison $r = 3$

$$S = u_{1996} + u_{1997} + \cdots + u_{2013} = (2013 - 1996 + 1)\frac{u_{1996} + u_{2013}}{2} = 18\frac{u_{1996} + u_{2013}}{2}$$

On a : $u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$

Donc : $u_{1996} = 5 + 1996 \times 3 = 5 + 5988 = 5993$ et $u_{2013} = 5 + 2013 \times 3 = 5 + 6039 = 6044$

$$S = 18\frac{5993 + 6044}{2} = 18\frac{12037}{2} = 9 \times 12037 = 228703$$

3)On a : $v_n = 2^{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{u_{n+1}}}{2^{u_n}} = 2^{u_{n+1} - u_n} = 2^3 = 8 = q$

Par suite : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$

**Exercice7 :** 1)Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_0 = 3$ et $u_3 = 24$

a) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = 2$

b) Calculer : $S = u_0 + u_3 + \cdots + u_5$

2)Soit $(v_n)_n$ une suite tel que : $v_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer : $v_0$ et $v_1$

b) Montrer que la suite $(v_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison

c) Montrer que $2015$ est un terme de la suite $(v_n)_n$

**Solution :** 1) a) la raison $q$ ??

On a : $(u_n)_n$ une suite géométrique :

Donc : $u_3 = q^3 u_0$

Donc : $24 = q^3 \times 3$

Donc : $q^3 = \frac{24}{3} = 8$

Donc : $q = 2$

b) Calcul de : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_5$

$$S = (\text{le premier terme dans la somme})\frac{1 - \text{raison}^{(\text{le nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

$\text{le nombre de termes} = 5 - 0 + 1 = 6$

PROF. ATMANI NAJIB

**PROF: ATMANI NAJIB**

Donc : $S_5 = u_0 \frac{1-2^6}{1-2} = 3\frac{1-64}{-1} = (-3)\times(-63) = 189$

2) a) $v_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_0 = \frac{1}{2}\times 0 + \frac{3}{2} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ et $v_1 = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$

b) $v_{n+1} - v_n = \left(\frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Donc : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2} = r \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(v_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$ et sa raison $r = \frac{1}{2}$

c) $v_n = 2015$ signifie $\frac{1}{2}n + \frac{3}{2} = 2015$

Signifie $\frac{n+3}{2} = 2015$

Signifie $n+3 = 2015\times 2$

Signifie $n+3 = 4030$

Signifie $n = 4030 - 3 = 4027$

Donc : $u_{4027} = 2015$

**Exercice8 :** Soient les réel $x$ ; $y$ et $z$ différents deux a deux tels que :

→Les nombres : $x$ ; $y$ et $z$ soient les termes consécutifs d'une suite arithmétique $(u_n)_n$

→ Les nombres : $y$ ; $z$ et $x$ soient les termes consécutifs d'une suite géométrique $(v_n)_n$

→ $x + y + z = 18$

Calculer la somme des six premiers termes consécutifs des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$

**Solution :** Calculons : $x$ ; $y$ et $z$ :

$x$ ; $y$ et $z$ vérifient le système suivant : $\begin{cases} 2y = x+z \\ y^2 = xz \\ x+y+z = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ z = 12 - x \\ (12-x)^2 = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = x+z \\ y^2 = xz \\ 3y = 18 \end{cases}$

On a : $x^2 - 20x + 144 = 6x \Leftrightarrow (12-x)^2 = 6x \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = 24$

Puisque : $x \neq y$ et $y = 6$ alors : $x \neq 6$ et par suite : $z = -12$

Alors : $x = 24$ ; $y = 6$ et $z = -12$

→Les nombres : $24$ ; $6$ et $-12$ sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique $(u_n)_n$ de raison :

$r = 6 - 24 = -18$ et de premier terme : $u_1 = 24$

$u_n = u_1 + (n-1)r$ c'est-à-dire : $u_n = 42 - 18n$

$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_6 = \frac{6}{2}(u_1 + u_6) = 3(24 - 66) = \boxed{-126}$ car $u_6 = -66$

→Les nombres : $6$ ; $-12$ et $24$ soient les termes consécutifs d'une suite géométrique $(v_n)_n$

PROF: ATMANI NAJIB

de raison : $q=\frac{-12}{6}=-2$ et de premier terme : $v_1=6$

$v_n=v_1\times q^{n-1}$ c'est-à-dire : $v_n=6\times(-2)^{n-1}$

$$S'=v_1+v_2+\cdots+v_6=v_1\times\frac{1-q^6}{1-q}=6\times\frac{1-(-2)^6}{1+2}=\boxed{-126}$$

**Exercice9 :** Calculer en fonction de n la somme suivante : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

**Solutions :**1) On pose : $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ on a : $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ Car : $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}$

Donc : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

**Exercice10 :** Déterminer parmi les *suites suivantes celle qui est* arithmétique

*1)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $u_n=-\frac{1}{2}n+2025$

*2)* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $v_n=2(n+1)^2-2024$

*3)* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par :* $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $w_n=(\sqrt{3}+1)n-(\sqrt{3}-1)$

**Solution :1)** On a : $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $u_n=-\frac{1}{2}n+2025$

$$u_{n+1}-u_n=\left(-\frac{1}{2}(n+1)+2025\right)-\left(-\frac{1}{2}n+2025\right)=-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+2025+\frac{1}{2}n-2025=-\frac{1}{2}=constante$$

Donc : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=-\frac{1}{2}$ et de premier terme :

$u_0=-\frac{1}{2}\times0+2025=2025$

2) Méthode1 : On a : $v_0=2(0+1)^2-2024=-2022$ et $v_1=2(1+1)^2-2024=-2016$

et $v_2=2(2+1)^2-2024=-2006$

Ainsi : $v_1-v_0=6$ et $v_2-v_1=10$ c'est-à-dire : $v_1-v_0\neq v_2-v_1$

Donc : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

Méthode2 :

$$v_{n+1}-v_n=\left(2(n+2)^2-2024\right)-\left(2(n+1)^2-2024\right)=2(n+2)^2-2(n+1)^2=4n+6\neq constante$$

Donc : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique

**3)** On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ; $w_n=(\sqrt{3}+1)n-(\sqrt{3}-1)$

PROF: ATMANI NAJIB

$$w_{n+1}-w_n=\left(\left(\sqrt{3}+1\right)(n+1)-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)\left(\left(\sqrt{3}+1\right)n-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)=\sqrt{3}+1=cons\tan te$$

Donc : La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison $r=\sqrt{3}+1$ et de premier terme :

$w_1=\left(\sqrt{3}+1\right)\times 1-\left(\sqrt{3}-1\right)=\sqrt{3}+1+1-\sqrt{3}=2$

**Exercice11 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{2u_n-1}{u_n} \\ u_0=2 \end{cases}$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison $r$ et son premier terme

2) Ecrire $v_n$ en fonction de n

3) En déduire $u_n$ en fonction de n

4) Calculer la somme suivante : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{32}$

**Solution :**1) $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1}{u_{n+1}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{1}{\dfrac{2u_n-1}{u_n}-1}-\dfrac{1}{u_n-1}=\dfrac{u_n}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_n-1}=1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0-1}=\dfrac{1}{2-1}=1$

2) Ecriture de $v_n$ en fonction de n :

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=1$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0+nr=1+n\times 1=1+n$

3) Ecriture de $u_n$ en fonction de n :

Puisque : $v_n=\dfrac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\dfrac{1}{v_n}$ c'est-à-dire : $u_n=\dfrac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n=\dfrac{v_n+1}{v_n}=\dfrac{1+(n+1)}{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}$

4) On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique

Donc : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{13}=(13-0+1)\dfrac{v_0+v_{13}}{2}$

$s_n=14\dfrac{1+v_{13}}{2}$ et on a : $v_n=n+1$ donc : $v_{13}=13+1=14$

Donc : $s_n=14\dfrac{1+14}{2}=7\times 15=105$

**Exercice12 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{1}{3}u_n+2 \\ u_0=2 \end{cases}$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$

Et soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-3$ $\forall n\in\mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB

1) Calculer: $u_1$ ; $v_0$

2) Montrer par récurrence que : $u_n \leq 3$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

b) Ecrire $v_n$ en fonction de n

c) En déduire $u_n$ en fonction de n

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

Calculer : $S_n$ en fonction de n

**Solution :** 1) On a : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{2}{3}u_0 + 1$ c'est-à-dire : $u_{0+1} = \frac{2}{3}\times 1 + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$

Donc : $u_1 = \frac{5}{3}$

Pour n=1 on : $u_{1+1} = \frac{2}{3}u_1 + 1$ c'est-à-dire : $u_2 = \frac{2}{3}\times\frac{5}{3} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{10}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9}$

On a : $v_n = u_n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3$ c'est-à-dire : $v_0 = -2$

Pour n=1 on : $v_1 = u_1 - 3 = \frac{5}{3} - 3 = \frac{5-9}{3} = \frac{-4}{3}$ c'est-à-dire : $v_1 = -\frac{4}{3}$

2) Montrons que : $u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \leq 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \leq 3$

Montrons que : $u_{n+1} \leq 3$ ?

$$3 - u_{n+1} = 3 - \left(\frac{2}{3}u_n + 1\right) = 3 - \frac{2}{3}u_n - 1 = 2 - \frac{2u_n}{3} = \frac{6-2u_n}{3} = \frac{2(3-u_n)}{3}$$

On a : $u_n \leq 3$ donc $3 - u_n \geq 0$

Donc : $\frac{2(3-u_n)}{3}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq 3$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = \frac{2u_n + 3 - 3u_n}{3} = \frac{-u_n + 3}{3} = \frac{3 - u_n}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On a : $u_n \leq 3$ donc : $3 - u_n \geq 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{3-u_n}{3} \geq 0$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc : $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots\ldots \leq u_n$

Donc : $u_0 \leq u_n$ c'est-à-dire : $1 \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

**c)** la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3 car $u_n \leq 3$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $1$ car $1 \leq u_n$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \frac{2}{3}$ ?

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n - 6}{3} = \frac{2(u_n - 3)}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 3)$$

Donc : $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \frac{2}{3}$ et son premier terme : $v_0 = -2$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \frac{2}{3}$ et son premier terme : $v_0 = -2$

Alors : $v_n = v_0 \times q^n = (-2) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) On a : $v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n + 3 = u_n$

Et on a : $v_n = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc : $u_n = 3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

**Exercice13 :** Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $0 \prec u_n \prec 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 + \frac{\alpha}{u_n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Déterminer la valeur de $\alpha$ pour l'laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

3) On prend : $\alpha = -2$

a) Calculer : $S_n = v_3 + v_4 + \ldots + v_n$ en fonction de n

b) Déterminer $u_n$ en fonction de n

**Solution :** 1Montrons par récurrence que : $0 \prec u_n \prec 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = \frac{1}{2}$ donc : $0 \prec u_0 \prec 2$ c'est-à-dire : a proposition vraie pour n=0

Supposons : $0 \prec u_n \prec 2$

Montrons que : $0 \prec u_{n+1} \prec 2$ ?

On a : $0 \prec u_n \prec 2 \Rightarrow -2 \prec -u_n \prec 0 \Rightarrow 1 \prec 3-u_n \prec 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \prec \frac{1}{3-u_n} \prec 1$ et comme : $0 \prec u_n \prec 2$

Alors : $0 \times \frac{1}{3} \prec \frac{1}{3-u_n} u_n \prec 1 \times 2$

Donc : $0 \prec u_{n+1} \prec 2$

Donc : $0 \prec u_n \prec 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 + \frac{\alpha}{u_n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Déterminons la valeur de $\alpha$ pour l'laquelle la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique

On a : $v_n = 1 + \frac{\alpha}{u_n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_{n+1} = 1 + \frac{\alpha}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{\frac{u_n}{3-u_n}} = 1 + \frac{\alpha(3-u_n)}{u_n} = 1 + \frac{3\alpha - \alpha u_n}{u_n} = 1 - \alpha + 3\frac{\alpha}{u_n}$ et comme : $v_n - 1 = \frac{\alpha}{u_n}$

Alors : $v_{n+1} = 1 - \alpha + 3(v_n - 1) \Leftrightarrow \boxed{v_{n+1} = -\alpha - 2 + 3v_n}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si et seulement si : $-\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -2}$

3) On prend : $\alpha = -2$

a) Calculons : $S_n = v_3 + v_4 + \dots + v_n$ en fonction de n

Comme : $\alpha = -2$ alors La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $3 = q$ et son premier terme :

$v_0 = 1 + \frac{\alpha}{u_0} = 1 - \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 - 4 = -3$ et on a : $v_n = v_0 \times 3^n = (-3) \times 3^n = -3^{n+1}$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique donc : $S_n = (\textit{le premier terme dans la somme}) \frac{1 - raison^{(\textit{le nombre de termes})}}{1 - raison}$

$\textit{le nombre de termes} = n - 3 + 1 = n - 2$

Donc : $S_n = v_3 \frac{1-3^{n-2}}{1-3} = -81 \frac{1-3^{n-2}}{-2} = \boxed{\frac{81}{2}\left(1-3^{n-2}\right)}$

b) Déterminons : $u_n$ en fonction de n

On a : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ donc : $\frac{2}{u_n} = 1 - v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{2}{1 - v_n}$

Par suite : $\boxed{u_n = \frac{2}{1+3^{n+1}}}$

PROF: ATMANI NAJIB

**Exercice14 :** Soit $a_n$ et $b_n$ les suites définies pour tout n entier naturel par : $\begin{cases} a_0 = 2,\ b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$

1) Soit $(u_n)$ la suite de terme général : $u_n = a_n + b_n$ . Montrer que $(u_n)$ est constante et calculer $u_n$ en fonction de n.

2) Soit $(v_n)$ la suite de terme général : $v_n = a_n - b_n$ . Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique. En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de n.

3)Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $u_n$ et $v_n$ puis en fonction de n..

**Solution :** 1) $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) + \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n)$.

$u_{n+1} = \frac{1}{5}(5a_n + 5b_n) = a_n + b_n = u_n$

Donc : $(u_n)$ est constante et vaut : $u_0 = a_0 + b_0 = 5$ .

2) $v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(a_n - b_n) = \frac{1}{5}v_n$.

$(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme : $v_0 = a_0 - b_0 = -1$.

On a donc : $v_n = v_0 q^n = \dfrac{-1}{5^n}$ .

3) On a : $\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 2a_n \\ u_n - v_n = 2b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ b_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left(5 + \dfrac{1}{5^n}\right) \end{cases}$.

On vérifie avec Excel par exemple : que $a_n$ et $b_n$ s'approchent de $\frac{5}{2}$ lorsque n augmente

| n | $a_n$ | $b_n$ | n | $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 3 | 7 | 2,4999936 | 2,5000064 |
| 1 | 2,4 | 2,6 | 8 | 2,49999872 | 2,50000128 |
| 2 | 2,48 | 2,52 | 9 | 2,49999974 | 2,50000026 |
| 3 | 2,496 | 2,504 | 10 | 2,49999995 | 2,50000005 |
| 4 | 2,4992 | 2,5008 | 11 | 2,49999999 | 2,50000001 |
| 5 | 2,49984 | 2,50016 | 12 | 2,5 | 2,5 |
| 6 | 2,499968 | 2,500032 | 13 | 2,5 | 2,5 |

**Exercice15 :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$ et $u_0 = 2$ ; $v_n = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2(n+1)}$

1)a) Montrer que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) Ecrire $u_n$ en fonction de n

PROF: ATMANI NAJIB

2) a) Montrer que : $2^n \succ n\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Déduire que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \prec u_n \prec \frac{2}{n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

**Solution :** 1) a) Montrons que : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

Soit : $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2(n+1)}$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2(n+1)(n+2)}\right) - \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{n-2n-2}{2(n+1)(n+2)}\right)$$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2(n+1)}\right) = \boxed{\frac{1}{2}v_n}$

Par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme

$v_0 = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{2(0+1)} = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Donc : $v_n = v_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

Comme on a : $v_n = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2(n+1)}$ alors : $v_n + \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow u_n = 2v_n + \frac{1}{n+1}$

Alors : $u_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{n+1} = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{n+1}}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}$

**2)** a) Montrons par récurrence que : $2^n \succ n\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

1étapes : n=1 : $2^1 = 2 \succ 1$

Donc la proposition est vraie pour n=1

2étapes : Supposons que : $2^n \succ n$

3étapes : Montrons alors que : $2^{n+1} \succ n+1$??

On a : $2^n \succ n$ donc : $2^n \times 2 \succ 2n$ c'est-à-dire : $2^{n+1} \succ 2n$ et comme : $n \geq 1$ alors : $2n \geq n+1$

Alors : $2^{n+1} \succ n+1$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ : 2^n \succ n$

**b)** Déduisons que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \prec u_n \prec \frac{2}{n}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$ : On a : $u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1}$ et comme : $2^n \succ n$ c'est-à-dire : $\frac{1}{2^n} \prec \frac{1}{n}$ et puisque : $\frac{1}{n+1} \prec \frac{1}{n}$

Alors : $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1} \prec \frac{2}{n}\ (1)$ et puisque : $0 \prec \frac{1}{n+1}$

Donc : $\frac{1}{2^n} \prec \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n+1}\ (2)$

De : $(1)$ et $(2)$ en déduit que : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \prec u_n \prec \frac{2}{n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

**Exercice16 :** On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 1$ et : $u_{n+1} = \frac{2u_n^3}{3u_n{}^2+1}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : la suite $(u_n)$ est minorée par 0

2) étudier la monotonie de la suite $(u_n)$

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ b) Déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Solution :** 1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n \succ 0$

1étapes : n=0 : $u_0 = 1$ et $u_0 \succ 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n \geq 0$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \geq 0$??

On a : $u_n \geq 0$ Donc : $2u_n^3 \geq 0$ et $3u_n^2+1 \succ 0$ Donc : $\frac{2u_n^3}{3u_n{}^2+1} \geq 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \geq 0$

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n \geq 0$

Donc : la suite $(u_n)$ est minorée par 0

b) Etudions la monotonie de la suite $(u_n)$ :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n^3}{3u_n{}^2+1} - u_n = \frac{2u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n{}^2+1} = \frac{-u_n^3 - u_n}{3u_n{}^2+1} = \frac{-\left(u_n^3 + u_n\right)}{3u_n{}^2+1} \leq 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n \geq 0$$

Donc : $u_{n+1} - u_n \leq 0$ par suite: la suite $(u_n)$ est décroissante

2) a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

$$u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{2u_n^3}{3u_n{}^2+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{4u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{2(3u_n{}^2+1)} = \frac{u_n^3 - u_n}{2(3u_n{}^2+1)} = \frac{u_n\left(u_n^2-1\right)}{2(3u_n{}^2+1)} = \frac{u_n(u_n-1)(u_n+1)}{2(3u_n{}^2+1)}$$

et comme la suite $(u_n)$ est décroissante alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n \leq u_0$

Donc : $u_n \leq 1$ et on a : $3u_n{}^2+1 \succ 0$ *et* $u_n+1 \succ 0$ *et* $u_n \geq 0$ *et* $u_n - 1 \prec 0$

Donc : $u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \leq 0$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

b) Déduisons que : $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1étapes : n=0 : $u_0 = 1$ et comme : $u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

PROF: ATMANI NAJIB

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ??

On a : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc : $u_n \times \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}$ donc : $\frac{u_n}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ et comme : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$

Donc : $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$ ; $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

**Exercice17 :** Soit la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer qu'il existe $u_0$ tel que la suite $(u_n)$ soit stationnaire

2) Supposons que : $u_0 \in [0;1]$ Montrer que la suite $(u_n)$ est monotone et bornée

**Solutions :** 1) la suite $(u_n)$ est stationnaire signifie que : $u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow u_n - u_n^2 = u_n \Leftrightarrow u_n^2 = 0 \Leftrightarrow u_n = 0$

$n = 0 \Rightarrow \boxed{u_0 = 0}$

2) Supposons que : $u_0 \in [0;1]$ Montrons que la suite $(u_n)$ est monotone et bornée ???

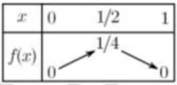
$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = f(u_n)$ Donc : $f(x) = x - x^2 \quad Df = \mathbb{R}$

Etude des variations de $f$ : $D_f = \mathbb{R}$ : On utilisant le résumé de notre cours :

On a : $a = -1 \prec 0$ et $b = 1$ et $c = 0$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ et $f(\alpha) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

Le tableau de variations de $f$ :



Si $x \in I = [0;1] \Rightarrow f(x) \in \left[0;\frac{1}{4}\right] \subset [0;1]$ donc : $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0;1]$ donc : la suite $(u_n)$ est bornée

**Méthode**2 : Montrons que $0 \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $0 \leq u_0 \leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$

3étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$??

On a : $0 \leq u_n \leq 1$ donc : $0 \leq f(u_n) \leq 1$

Donc : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ CQFD

Donc : la suite $(u_n)$ est bornée

Montrons que la suite $(u_n)$ est monotone ??

Etude du signe de : $u_{n+1} - u_n = ?$

Cela revient aussi à étudier le signe de : $f(x) - x = ?$

$f(x) - x = x - x^2 - x = -x^2 \leq 0$ donc : $f(x) - x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq x$

PROF ATMANI NAJIB

On a : $0\le u_n \le 1$ donc : $f(u_n)\le u_n$ donc : $u_{n+1}\le u_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)$ est décroissante

**Exercice18 :** Une entreprise de transport possède 40 camions en décembre 1991. L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année.

1) Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 1992, en 1993 et en 1994.
2) Ces nombres forment une suite.

a) Donner la nature de cette suite.

b) Préciser le premier terme $u_1$ et la raison de cette suite.

c) Donner l'expression du nombre Un de camions que possède l'entreprise l'année n.

3) Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2002 ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB