1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Série N°5 : *LES SUITES NUMERIQUES*

(La correction voir😊 http://www.xriadiat.com)

Exercice1 : Raisonnement par récurrence

1) On note $1\times2\times3\times.......\times n=n!$ (et on lit « factorielle » n).

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geq1$, on a : $n!\geq 2^{n-1}$.

2) Démontrez que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n}-2^{n}$ est un multiple de 7.

Exercice2 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n=3+\frac{5}{n}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée

Exercice3 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=u_n^{\ 2}+2u_n+2\\ u_0=2\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer u_1

2) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Exercice4 : Soit f la fonction définie sur : $I=]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) Montrer que : $\forall x\in I\ \ f(x)\geq3$

2)Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$:($\forall n\in\mathbb{N}$)

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone

Exercice5 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_0=100$ et $u_{10}=10$

1) a) Vérifier que la raison r de cette suite est : $r=2$

b) Calculer la somme suivante : $A=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

2) Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique tel que : $v_3=100$ et sa raison $q=10$

a) Montrer que : $v_0=0,1$

b) Montrer que : $S=v_0+v_1+\cdots+v_4$ est égale a : **1111,1**

Exercice6 : Déterminer le réel x pour que les nombres : $x+1$; x et $2x+1$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Exercice7 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n=u_n+\frac{1}{n}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice8 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0\in\mathbb{R}$ et : $u_{n+1}=\left(1-\frac{u_n}{2}\right)u_n$;$\forall n\in\mathbb{N}$

1) Déterminer u_0 pour que : la suite (u_n) soit constante

2) On suppose que : $0\prec u_0\prec1$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad 0\leq u_n\leq1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Exercice9 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n}\\ u_1=1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 et v_0

2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

3) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

Exercice 10 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1\\ u_0=1\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; u_2 ; v_0 et v_1

2) Montrer par récurrence que : $u_n\leq3\quad\forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$: Calculer : S_n en fonction de n

Exercice11 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{3-u_n}\\ u_0=\frac{1}{2}\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=1-\frac{2}{u_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Exercice12 : On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$u_{n+1}=\frac{u_n+6}{u_n+2}$

1) Montrer qu'il existe deux valeurs a = 2 et b = –3 de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2) Soit $f(x)=\frac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée f sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite $(D):y=x$. sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0=0$).

Conjecturer le comportement de : (u_n) (sens de variation,).

3) Montrer que si u_0 est différent de : a et b, il en est de même de u_n
(Faire une démonstration par récurrence).

4) Calculer $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$. En déduire la nature de la suite (v_n) tel que :

$v_n=\frac{u_n-a}{u_n-b}$

Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

Exercice13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+2}=\frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n)\\ u_0=2\ ;\ u_1=3\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n=u_n-u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_2 ; u_3 ; v_1 et v_2

2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) Calculer la somme : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+...+v_n$ en fonction de n

5) En déduire : u_n en fonction de n

Exercice14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\\ u_0\in]-1;0[\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec0\quad\forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice15 : Un algorithme de calcul de $\sqrt{a}$ (algorithme de Héron, déjà connu des Babyloniens) consiste à utiliser la suite récurrente $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)$ de premier terme u_0 quelconque et positif.

1) Montrer que si u_0 est positif, u_1 est forcément supérieur à $\sqrt{a}$ puis montrer que tous les u_n sont supérieurs à $\sqrt{a}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) Faire l'application numérique pour $a=2$.

4) On prend : $a>1$.

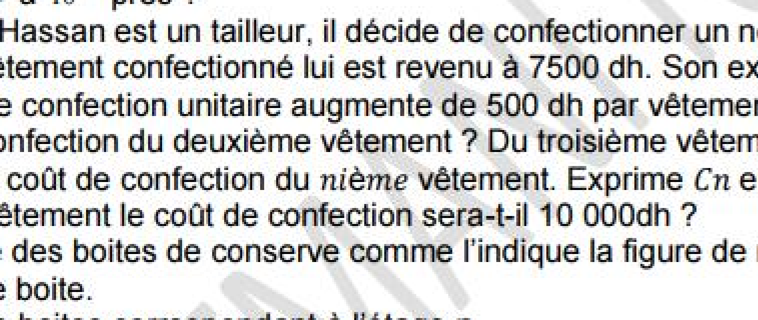
a) Montrer que pour tout n : $u_{n+1}-\sqrt{a}\leq\frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2\leq\frac{1}{2}(u_n-\sqrt{a})^2$.

b) Montrer par récurrence que $u_n-\sqrt{a}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\left(u_0-\sqrt{a}\right)$.

c) En supposant que : $\left|u_0-\sqrt{a}\right|\leq2$, au bout de combien d'itérations sera-t-on sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-9} près ?

Exercice16 : Monsieur Hassan est un tailleur, il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 7500 dh. Son expérience lui permet d 'affirmer que le cout de confection unitaire augmente de 500 dh par vêtements supplémentaires.
1) Quel est le coût de confection du deuxième vêtement ? Du troisième vêtement ?
2) On désigne par Cn le coût de confection du $nième$ vêtement. Exprime Cn en fonction de n
3) Au combien n'ième vêtement le coût de confection sera-t-il 10 000dh ?

Exercice17 : On empile des boites de conserve comme l'indique la figure de manière que l'étage n°1 ne contienne qu'une boite.
On note u_n le nombre de boites correspondant à l'étage n.



1) Quelle est la nature de la suite u_n ? Indiquer le premier terme et la raison.
2) On empile 10 étages. En utilisant les formules, calculer le nombre total de boites de cet empilage.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB