1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction série N°5 : *LES SUITES NUMERIQUES*

Exercice1 : Raisonnement par récurrence

1) On note $1\times2\times3\times.......\times n=n!$ (et on lit « factorielle » n).

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geq1$, on a : $n!\geq 2^{n-1}$.

2) Démontrez que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n}-2^{n}$ est un multiple de 7.

Solution : 1) Pour $n=1$ la propriété est $1!\geq 2^{1-1}\Leftrightarrow 1\geq1$ ce qui est vrai.

Supposons que $n!\geq 2^{n-1}$; alors il faut montrer que $(n+1)!\geq 2^{n+1-1}\Leftrightarrow n!(n+1)\geq 2^{n}$.

Or par hypothèse $n!\geq 2^{n-1}$ donc en multipliant par $n+1$ qui est supérieur à 2, on a $n!(n+1)\geq 2^{n-1}(n+1)\geq 2^{n-1}\times2=2^{n}$.

2) Vérifions pour quelques valeurs que cela marche :

n	$3^{2n}-2^{n}$	$\frac{3^{2n}-2^{n}}{7}$
0	0	0
1	7	1
2	77	11
3	721	103
4	6545	935
5	59017	8431
6	531377	75911
7	4782841	683263
8	43046465	6149495
9	387419977	55345711
10	3486783377	498111911

On suppose donc que : $3^{2n}-2^{n}$ est un multiple de 7, soit $3^{2n}-2^{n}=7k$ où k est un entier.

Montrons maintenant que : $3^{2(n+1)}-2^{n+1}=7k'$:

PROF: ATMANI NAJIB

Cela donne : $3^{2n}\times 3^2-2^n\times 2=7k' \Leftrightarrow 3^{2n}\times 9-2^n\times 2=7k'$; or $3^{2n}-2^n=7k \Leftrightarrow 3^{2n}=2^n+7k$

D'où en remplaçant : $3^{2n}\times 9-2^n\times 2=7k' \Leftrightarrow \left(2^n+7k\right)\times 9-2^n\times 2=7k' \Leftrightarrow 2^n(9-2)+9\times 7k=7k''$

$$\Leftrightarrow 2^n\times 7+9\times 7k=7k'$$

On a donc $k'=2^n+9\times k$ qui est bien un entier.

Exercice2 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n=3+\dfrac{5}{n}$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée

Solutions : Soit $n\in\mathbb{N}^*$

$u_{n+1}-u_n=3+\dfrac{5}{n+1}-3-\dfrac{5}{n}=\dfrac{5}{n+1}-\dfrac{5}{n}=\dfrac{-5}{n(n+1)}\prec 0$ Car : $n(n+1)\succ 0$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante

Puisque : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante : $u_n\le u_1$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et comme : $u_1=3+\dfrac{5}{1}=8$

Alors : $u_n\le 8$: $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc :la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 8

Exercice3 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=u_n{}^2+2u_n+2\\ u_0=2\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer u_1

2) Montrer que : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

Solution :1) On a : $\begin{cases}u_{n+1}=u_n{}^2+2u_n+2\\ u_0=2\end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ donc :

$n=0\Rightarrow u_{0+1}=u_0{}^2+2u_0+2\Rightarrow \boxed{u_1=2^2+2\times 2+2=10}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}\ :1\le u_n$

1étapes : l'initialisation : Pour n=0 nous avons $u_0=2$ donc $1\le u_0$.
Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : d'hérédité

Soit : $n\in\mathbb{N}$; Supposons que : $1\le u_n$

Montrons alors que : $1\le u_{n+1}$??

On a : $u_{n+1}-1=u_n{}^2+2u_n+2-1=u_n{}^2+2u_n+1=(u_n+1)^2\ge 0$

Donc : $1\le u_{n+1}$

Donc : d'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}\ :1\le u_n$
Par suite : La suite est minorée par 1

Exercice4 : Soit f la fonction définie sur : $I=]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$

1) Montrer que : $\forall x\in I\ \ f(x)\ge 3$

2)Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=5$ et $u_{n+1}=f(u_n)$:($\forall n\in\mathbb{N}$)

PROF: ATMANI NAJIB

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \ge 3$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone

Solution : 1) $f(x)-3=\frac{x^2-3x+6}{x-1}-3=\frac{x^2-6x+9}{x-1}$

$f(x)-3=\frac{(x-3)^2}{x-1}\ge 0 \quad \forall x\in I$ car $(x-3)^2\ge 0$ et $x-1\ge 0 \ (x\in I)$

Donc : $\forall x\in I \ \ f(x)\ge 3$

2)a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \ge 3$?

- On a : $u_0=5\ge 3$ la ppté est vraie pour n=0
- Supposons que : $u_n \ge 3$
- Montrons que : $u_{n+1}\ge 3$?

Comme $u_n\ge 3$ alors $u_n\ge 1$ donc $f(u_n)\ge 3$ d'après(1) donc $u_{n+1}\ge 3$ cqfd

b) $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n{}^2-3u_n+6}{u_n-1}-u_n=\frac{u_n{}^2-3u_n+6-u_n{}^2+u_n}{u_n-1}$

$u_{n+1}-u_n=\frac{-2u_n+6}{u_n-1}=\frac{2(3-u_n)}{u_n-1}$ et comme $u_n\ge 3$

Alors : $3-u_n\le 0$ et $u_n-1\succ 0$

Donc : $u_{n+1}-u_n\le 0$ par suite : la suite (u_n) est décroissante

Exercice5 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que $u_0=100$ et $u_{10}=10$

1) a) Vérifier que la raison r de cette suite est : $r=2$
b) Calculer la somme suivante : $A=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

2) Soit $(v_n)_n$ une suite géométrique tel que : $v_3=100$ et sa raison $q=10$

a) Montrer que : $v_0=0,1$

b) Montrer que : $S=v_0+v_1+\cdots+v_4$ est égale a : **1111,1**

Solution :1) a) la raison r ??

On a : $\forall (n;p)\in\mathbb{N}^2 \quad u_n=u_p+(n-p)r$

Pour n= 10 et p=0 on a : $u_{10}=u_0+(10-0)r$

Donc : $u_{10}=u_0+10r$

Donc : $10=100+10r \Leftrightarrow 10r=10-100 \Leftrightarrow 10r=-90 \Leftrightarrow r=-\frac{90}{10}=-9$

b) Calcul de la somme suivante : $A=u_0+u_1+\cdots+u_{10}$

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique donc :

$A=u_0+u_1+\cdots+u_{10}=(10-0+1)\frac{u_0+u_{10}}{2}$

$A=11\frac{100+10}{2}=11\frac{110}{2}=11\times 55=605$

2)Puisque $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $v_n=v_p\times q^{n-p} \qquad \forall (n;p)\in\mathbb{N}^2$

PROF: ATMANI NAJIB

Pour p=0 et n=3 On a :$v_3 = v_0 \times q^{3-0}$

Donc : $100 = v_0 \times 10^3$

Donc : $v_0 = \frac{100}{1000} = 0,1$

b) Calcul de : $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_4$

$$S = (le\ premier\ terme\ dans\ la\ somme)\frac{1-raison^{(le\ nombre\ de\ termes)}}{1-raison}$$

$le\ nombre\ de\ termes = 4-0+1=5$

Donc : $S = v_0\frac{1-10^5}{1-10} = 0,1\frac{1-100000}{-9} = 0,1\times\frac{-99999}{-9} = 0,1\times 11111 = 1111,1$

Exercice6 : Déterminer le réel x pour que les nombres : $x+1$; x et $2x+1$ soient les termes consécutifs d'une suite Arithmétique pour laquelle il faut déterminer la raison.

Solution : $x+1$; x et $2x+1$ les Termes consécutifs d'une suite Arithmétique

$\Leftrightarrow 2x = (x+1)+(2x+1) \Leftrightarrow 2x = 3x+2 \Leftrightarrow x = -2$

Donc les termes de la suite sont :$-2+1=-1$ et -2 et $-4+1=-3$

Donc : $-2-(-1) = \boxed{-1=r}$

Exercice7 : Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

Solution :1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \succ 0$ donc : (u_n) est croissante

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)^3} \prec 0$$

Donc : (v_n) est décroissante.

Exercice8 : On considère la suite (u_n)définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $u_{n+1} = \left(1-\frac{u_n}{2}\right)u_n$;$\forall n \in \mathbb{N}$

1) Déterminer u_0 pour que : la suite (u_n)soit constante

2) On suppose que : $0 \prec u_0 \prec 1$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \le u_n \le 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

Solution : 1) Déterminons u_0 pour que : la suite (u_n)soit constante

(u_n) Constante signifie que : $u_{n+1} = u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow u_n = u_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_1 = u_0$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{u_0}{2}\right)u_0 = u_0 \Leftrightarrow \left(1-\frac{u_0}{2}\right)u_0 - u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0\left(1-\frac{u_0}{2}-1\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{u_0}{2}\times u_0 = 0 \Leftrightarrow u_0 = 0$$

Donc :la suite (u_n)soit constante si et seulement si : $u_0 = 0$

2) On suppose que : $0 \prec u_0 \prec 1$

PROF: ATMANI NAJIB

a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n \leq 1$

1étapes : n=0 : on a : $0 \prec u_0 \prec 1$ donc : $0 \leq u_0 \leq 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $0 \leq u_n \leq 1$

3étapes : Montrons alors que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$??

On a : $0 \leq u_n \leq 1$ donc : $0 \leq \frac{u_n}{2} \leq \frac{1}{2}$

Donc : $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{u_n}{2} \leq 1$ et $0 \leq u_n \leq 1$

Donc : $0 \leq \left(1 - \frac{u_n}{2}\right) u_n \leq 1$ c'est-à-dire : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

D'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ \ 0 \leq u_n \leq 1$

b) Etudions la monotonie de la suite (u_n)

Soit : $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{u_n}{2}\right) u_n - u_n = -\frac{(u_n)^2}{2} \leq 0$$

Donc : la suite (u_n) est décroissante

Exercice9 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_1 = 1 \end{cases}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : u_1 et v_0

2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

3) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n

Solution :1) $u_1 = \frac{u_0}{1+2u_0} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ et $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$

2) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n-1}{u_n} = 2 = r$

Donc : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison : $r = 2$ et son premier terme : $v_0 = 1$

3) puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison : $r = 2$ et son premier terme : $v_0 = 1$ alors :

$v_n = v_0 + nr$ donc : $v_n = 1 + 2n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Et on a : $v_n = \frac{1}{u_n}$ et $v_n = 1 + 2n$ donc : $u_n = \frac{1}{1+2n}$

Exercice 10 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 1 & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

PROF: ATMANI NAJIB

Et soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - 3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; u_2 ; v_0 et v_1

2) Montrer par récurrence que : $u_n \le 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Déduire que la suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) Que peut-on déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

3) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

4) On pose : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$: Calculer : S_n en fonction de n

Solution : 1) On a : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1} = \frac{2}{3}u_0 + 1$

Donc : $u_{0+1} = \frac{2}{3}\times 1 + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$ c'est-à-dire : $u_1 = \frac{5}{3}$

Pour n=1 on : $u_{1+1} = \frac{2}{3}u_1 + 1$ c'est-à-dire : $u_2 = \frac{2}{3}\times\frac{5}{3} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{10}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9}$

On a : $v_n = u_n - 3 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $v_0 = u_0 - 3 = 1 - 3$ c'est-à-dire : $v_0 = -2$

Pour n=1 on : $v_1 = u_1 - 3 = \frac{5}{3} - 3 = \frac{5-9}{3} = \frac{-4}{3}$ c'est-à-dire : $v_1 = -\frac{4}{3}$

2) Montrons que : $u_n \le 3 \quad ; \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on a $u_0 = 1 \le 3$ donc la proposition vraie pour n=0

Supposons : $u_n \le 3$

Montrons que : $u_{n+1} \le 3$?

$$3 - u_{n+1} = 3 - \left(\frac{2}{3}u_n + 1\right) = 3 - \frac{2}{3}u_n - 1 = 2 - \frac{2u_n}{3} = \frac{6 - 2u_n}{3} = \frac{2(3-u_n)}{3}$$

On a : $u_n \le 3$ donc $3 - u_n \ge 0$

Donc : $\frac{2(3-u_n)}{3}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} \le 3$

Donc d'après le principe de récurrence : $u_n \le 3$; $\forall n\in\mathbb{N}$

3)a) Etude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = \frac{2u_n + 3 - 3u_n}{3} = \frac{-u_n + 3}{3}$ donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a : $u_n \le 3$ donc : $3 - u_n \ge 0$

Donc : $u_{n+1} - u_n = \frac{3-u_n}{3} \ge 0$ c'est-à-dire : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

PROF: ATMANI NAJIB

b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc : $u_0 \le u_1 \le u_2 \le .... \le u_n$

Donc : $u_0 \le u_n$

Donc : $1 \le u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1

c) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3 car $u_n \le 3$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1car $1 \le u_n$;$\forall n \in \mathbb{N}$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

3) a) Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$?

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2$$

$$v_{n+1} = \frac{2u_n - 6}{3} = \frac{2(u_n - 3)}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 3)$$

Donc : $v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n$

Donc : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \dfrac{2}{3}$ et son premier terme : $v_0 = -2$

b) Puisque : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison : $q = \dfrac{2}{3}$et son premier terme : $v_0 = -2$

Alors : $v_n = v_0 \times q^n = (-2)\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c) On a : $v_n = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n + 3 = u_n$ et on a : $v_n = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ donc : $u_n = 3 - 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Exercice11 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n} \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique

2) écrire u_n en fonction de n

Solution :1) $v_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_{n+1}} = 1 - \dfrac{2}{\dfrac{u_n}{3-u_n}} = 1 - \dfrac{6 - 2u_n}{u_n}$ donc : $v_{n+1} = 3\left(1 - \dfrac{2}{u_n}\right)$ donc $v_{n+1} = 3v_n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

2) écrire u_n en fonction de n

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = -3$

Donc : $v_n = u_0 \times q^n \Leftrightarrow v_n = -3 \times 3^n = -3^{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$

PROF. ATMANI NAJIB

Puisque : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ donc $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ c'est-à-dire : $u_n = \frac{2}{1 + 3^{n+1}}$

Exercice12 : On définit la suite $\left(u_n\right)$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1) Montrer qu'il existe deux valeurs a = 2 et b = –3 de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2) Soit $f(x) = \frac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée f sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite $(D): y = x$. sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0 = 0$).

Conjecturer le comportement de : $\left(u_n\right)$ (sens de variation,).

3) Montrer que si u_0 est différent de : a et b, il en est de même de u_n
(Faire une démonstration par récurrence).

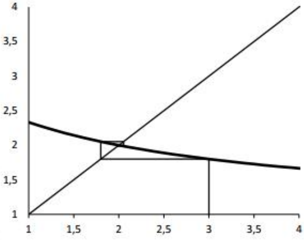
4) Calculer $\frac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} - b}$ en fonction de $\frac{u_n - a}{u_n - b}$. En déduire la nature de la suite $\left(v_n\right)$ tel que :

$$v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$$

Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n .

Solution : 1) $\left(u_n\right)$ est constante : $u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow u_n = \frac{u_n + 6}{u_n + 2} \Leftrightarrow u_n\left(u_n + 2\right) = u_n + 6 \Leftrightarrow u_n^2 + u_n - 6 = 0$,

Équation du second degré qui a les solutions : a = 2 et b = –3 de u_0 tels que la suite
2)



Comportement de $\left(u_n\right)$: pas monotone, et s'approche de 2.

3) Supposons donc u_n différent de 2 et −3.

On aura par exemple $u_{n+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{u_n + 6}{u_n + 2} = 2 \Leftrightarrow u_n + 6 = 2u_n + 4 \Leftrightarrow 2 = u_n$ ce qui est impossible.

Même chose pour : $u_n = -3$.

4) $\frac{u_{n+1} - a}{u_{n+1} - b} = \frac{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} - 2}{\frac{u_n + 6}{u_n + 2} + 3} = \frac{\frac{u_n + 6 - 2u_n - 4}{u_n + 2}}{\frac{u_n + 6 + 3u_n + 6}{u_n + 2}} = \frac{-u_n + 2}{4u_n + 12}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b} == \frac{-1}{4}\frac{u_n-2}{u_n+3} = -\frac{1}{4}\frac{u_n-a}{u_n-b} \Rightarrow v_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}\right)v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$, de premier terme v_0 (qui dépend de u_0)

Donc : $v_n = v_0\left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Comme on a :

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+3} \Leftrightarrow v_n(u_n+3) = u_n-2 \Leftrightarrow v_nu_n+3v_n = u_n-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1) = -3v_n-2 \Leftrightarrow u_n = \frac{-3v_n-2}{v_n-1} = \frac{3v_n+2}{1-v_n}$$ il reste à remplacer…

Exercice13 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n) & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 2 \;;\; u_1 = 3 \end{cases}$

Et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = u_n - u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_2 ; u_3 ; v_1 et v_2

2) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

3) Ecrire v_n en fonction de n

4) Calculer la somme : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k = v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

5) En déduire : u_n en fonction de n

Solution :1) On a : $u_{n+2} = \frac{1}{3}(4u_{n+1}-u_n)$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $u_{0+2} = \frac{1}{3}(4u_{0+1}-u_0) \Rightarrow u_2 = \frac{1}{3}(4u_1-u_0) \Rightarrow u_2 = \frac{10}{3}$

Pour n=1 : $u_{1+2} = \frac{1}{3}(4u_{1+1}-u_1) \Rightarrow u_3 = \frac{1}{3}(4u_2-u_1) \Rightarrow u_3 = \frac{31}{9}$

On a : $v_n = u_n - u_{n-1}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Pour n=1 : $v_1 = u_1 - u_0 \Rightarrow v_1 = 3-2 \Rightarrow \boxed{v_1 = 1}$

Pour n=2 : $v_2 = u_2 - u_1 \Rightarrow v_2 = \frac{10}{3} - 3 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{1}{3}}$

2) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique

On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n-u_{n-1}) - u_n = \frac{1}{3}(4u_n-u_{n-1}-3u_n) = \frac{1}{3}(u_{n+1}-u_{n-1}) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$$

Donc : $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{3}$

et de premier terme : $v_1 = 1$

3) Ecrivons v_n en fonction de n

PROF: ATMANI NAJIB

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=1$

Donc : $v_n=v_1\times q^{n-1}\Leftrightarrow \boxed{v_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

4) Calculons la somme : $s_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$; $s_n=\sum\limits_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n=v_1\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}\boxed{=\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

5) Déduisons : u_n en fonction de n

On a : $s_n=v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}+v_n=\left(\cancel{u_1}-u_0\right)+\left(u_2-\cancel{u_1}\right)+\ldots+\left(\cancel{u_{n-1}}-\cancel{u_{n-2}}\right)+\left(u_n-\cancel{u_{n-1}}\right)$

Donc : $s_n=u_n-u_0$

Donc : $u_n=s_n+u_0$ c'est-à-dire : $u_n=\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)+2=\boxed{\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$: $\forall n\in\mathbb{N}$

Exercice14 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} & \forall n\in\mathbb{N}\\ u_0\in\left]-1;0\right[\end{cases}$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\dfrac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Solution : 1) Montrons par récurrence que $-1\prec u_n\prec 0$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1étapes : n=0 on a : $-1\prec u_0\prec 0$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $-1\prec u_n\prec 0$

3étapes : Montrons alors que : $-1\prec u_{n+1}\prec 0$??

On a : $-1\prec u_n\prec 0$ donc : $1\prec u_n+2\prec 2$

Donc : $1\prec\sqrt{u_n+2}\prec\sqrt{2}$ donc : $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\prec\dfrac{1}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

Et puisque : $0\prec -u_n\prec 1$ alors : $0\prec\dfrac{-u_n}{\sqrt{u_n+2}}\prec 1$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : $-1 \prec \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \prec 0$ donc $-1 \prec u_{n+1} \prec 0$

D'où : $-1 \prec u_n \prec 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante :

$u_{n+1}-u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}}\left(1-\sqrt{u_n+2}\right)$ et puisque : $1-\sqrt{u_n+2} \prec 0$ et $\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \prec 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n \succ 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrons que $u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \ge u_0$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

Donc : $\sqrt{2+u_n} \ge \sqrt{2+u_0}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{\sqrt{2+u_n}} \le \frac{1}{\sqrt{2+u_0}}$ et puisque : $u_n \prec 0$ alors : $\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

Donc : $u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

3)Soit $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \succ u_{n+1} \ge \frac{u_n}{\sqrt{2+u_0}}$ donc : $0 \le -u_{n+1} \le \frac{-u_n}{\sqrt{2+u_0}}$

En donnant à n des valeurs on trouve :

$0 \le -u_1 \le \frac{-u_0}{\sqrt{2+u_0}}$

$0 \le -u_2 \le \frac{-u_1}{\sqrt{2+u_1}}$

………

$0 \le -u_{n-1} \le \frac{-u_{n-2}}{\sqrt{2+u_0}}$

$0 \le -u_n \le \frac{-u_{n-1}}{\sqrt{2+u_0}}$

Le produit des inégalités donne : $0 \prec -u_n \le \frac{-u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n}$ et donc : $u_n \ge \frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice15 : Un algorithme de calcul de $\sqrt{a}$ (algorithme de Héron, déjà connu des Babyloniens) consiste à utiliser la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ de premier terme u_0 quelconque et positif.

1) Montrer que si u_0 est positif, u_1 est forcément supérieur à $\sqrt{a}$ puis montrer que tous les u_n sont supérieurs à $\sqrt{a}$.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) Faire l'application numérique pour $a = 2$.

4) On prend : $a > 1$.

a) Montrer que pour tout n : $u_{n+1} - \sqrt{a} \le \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2 \le \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{a})^2$.

PROF. ATMANI NAJIB

b) Montrer par récurrence que $u_n-\sqrt{a}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\left(u_0-\sqrt{a}\right)$.

c) En supposant que : $\left|u_0-\sqrt{a}\right|\le 2$, au bout de combien d'itérations sera-t-on sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-9} près ?

Exercice16 : Monsieur Hassan est un tailleur, il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 7500 dh. Son expérience lui permet d 'affirmer que le cout de confection unitaire augmente de 500 dh par vêtements supplémentaires.

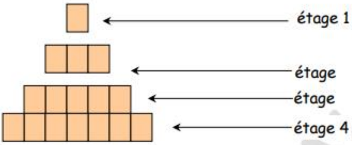
1) Quel est le coût de confection du deuxième vêtement ? Du troisième vêtement ?

2) On désigne par Cn le coût de confection du $nième$ vêtement. Exprime Cn en fonction de n

3) Au combien n'ième vêtement le coût de confection sera-t-il 10 000dh ?

Exercice17 : On empile des boites de conserve comme l'indique la figure de manière que l'étage n°1 ne contienne qu'une boite.

On note u_n le nombre de boites correspondant à l'étage n.



1) Quelle est la nature de la suite u_n ? Indiquer le premier terme et la raison.

2) On empile 10 étages. En utilisant les formules, calculer le nombre total de boites de cet empilage.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB