http://www.xriadiat.com/ **PROF: ATMANI NAJIB**

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction série N°6 : *LES SUITES NUMERIQUES*

PROF : ATMANI NAJIB

Exercice1 : On considère la suite (u_n)définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et : $u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{u_n^{\ 2} + 1}$;$\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \prec u_n \prec 1$

2) Montrer que la suite (u_n)est décroissante.

Solution : On considère la suite (u_n)définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et : $u_{n+1} = u_n + 1 - \sqrt{u_n^{\ 2} + 1}$;$\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \prec u_n \prec 1$

1étapes : n=0 : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \prec u_0 \prec 1$

Donc la proposition est vraie pour n=0
2étapes : Supposons que : $0 \prec u_n \prec 1$

3étapes : Montrons alors que : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$??

On a : $u_{n+1} = \frac{\left((u_n+1) - \sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)\left((u_n+1) + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)}{(u_n+1) + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{(u_n+1)^2 - u_n^{\ 2} - 1}{(u_n+1) + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{u_n^{\ 2} + 2u_n + 1 - u_n^{\ 2} - 1}{(u_n+1) + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{2u_n}{(u_n+1) + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}}$

et comme : $0 \prec u_n \prec 1$alors : $\frac{2u_n}{(u_n+1) + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} \succ 0$ c'est-à-dire : $0 \prec u_{n+1}$

On a : $u_{n+1} - 1 = (u_n+1) - \sqrt{u_n^{\ 2}+1} - 1 = u_n - \sqrt{u_n^{\ 2}+1} = \frac{\left(u_n - \sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)\left(u_n + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)}{u_n + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{u_n^{\ 2} - u_n^{\ 2} - 1}{u_n + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{-1}{u_n + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}}$

et comme : $0 \prec u_n \prec 1$ alors : $\frac{-1}{u_n + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} \prec 0$ c'est-à-dire : $u_{n+1} - 1 \prec 0$ donc : $u_{n+1} \prec 1$

Par suite : $0 \prec u_{n+1} \prec 1$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \prec u_n \prec 1$

Rq : (u_n)minorée par 0 et majorée par 1 donc ; (u_n)bornée

2) Montrons que la suite (u_n)est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = (u_n+1) - \sqrt{u_n^{\ 2}+1} - u_n = 1 - \sqrt{u_n^{\ 2}+1} = \frac{\left(1 - \sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)\left(1 + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}\right)}{1 + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{1 - u_n^{\ 2} - 1}{1 + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} = \frac{-u_n^{\ 2}}{1 + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}}$$

et comme : $0 \prec u_n \prec 1$ alors : $\frac{-u_n^{\ 2}}{1 + \sqrt{u_n^{\ 2}+1}} \prec 0$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_{n+1} - u_n \prec 0$

Donc : la suite (u_n)est décroissante.

Exercice 2 :

1) $(u_n)_n$ est une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$et sa raison $r = 5$

a) Calculer u_1 et u_2

b) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$

2) $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et $v_0 = \frac{2}{3}$ et $v_1 = 4$

a) Montrer que la raison $q = 6$

b) Ecrire v_n en fonction de n

Solution :1) $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 5$

a) $u_1 = u_0 + r = 3 + 5 = 8$

$u_2 = u_1 + r = 8 + 5 = 13$

b) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20} = (20 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_{20}}{2}$$

Calculons : u_{20}

$(u_n)_n$ Une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 3$ et sa raison $r = 5$

Donc : $u_n = u_0 + nr = 3 + 5n$

Donc : $u_{20} = 3 + 5 \times 20 = 3 + 100 = 103$

$$S = 21\frac{3+103}{2} = 21\frac{106}{2} = 21 \times 53 = 1113$$

2)a) $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et $v_0 = \frac{2}{3}$ et $v_1 = 4$

Donc : $v_1 = v_0 \times q$

Donc : $4 = \frac{2}{3} \times q$ c'est-à-dire : $4 \times 3 = 2 \times q$

Donc : $\frac{12}{2} = q = 6$

b) $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison q

Donc : $v_n = v_0 \times q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $v_n = \frac{2}{3} \times 6^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice3 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 9$ et sa raison $r = 6$

1) Ecrire u_n en fonction de n et vérifier que : $u_{22} = 141$

2) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{22}$

Solution : 1) Puisque $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0 = 9$ et sa raison $r = 6$ Donc : $u_n = u_0 + nr = 9 + 6n$

$u_n = 9 + 6n$ Donc : $u_{22} = 9 + 6 \times 22 = 9 + 132 = 141$

3) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{22} = (22 - 0 + 1)\frac{u_0 + u_{22}}{2}$$

$$S = 23\frac{9+141}{2} = 23\frac{150}{2} = 23 \times 75 = 1725$$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice4 : Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique tel que $u_0 = 81$ et $u_1 = 27$

1) Vérifier que la raison de cette suite est : $q = \frac{1}{3}$

2) Calculer u_2

3) Ecrire u_n en fonction de n

4) Calculer : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n

Solutions : 1) la raison q ??

On a : une suite géométrique est $(u_n)_n$

Donc : $u_1 = qu_0$

Donc : $27 = q \times 81$

Donc : $q = \frac{27}{81} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

2) On a : $u_2 = qu_1$

Donc : $u_2 = \frac{1}{3} \times 27 = \frac{27}{3} = 9$

3) u_n en fonction de n ?

Puisque $(u_n)_n$ est une suite géométrique

Alors on a : $u_n = u_0 \times q^n$

Donc : $u_n = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) Calcul de : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n

$$S = (\textit{le premier terme dans la somme}) \frac{1 - \textit{raison}^{(\textit{le nombre de termes})}}{1 - \textit{raison}}$$

$\textit{le nombre de termes} = n - 0 + 1 = n + 1$

$$S = u_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = 81 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = 81 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = \frac{243}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Exercice5 : Soit $(u_n)_n$ une suite tel que : $u_n = 2 - \frac{3}{4}n \quad ; \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer : u_0 et u_1

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{3}{4}$

3) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$

Solution : 1) $u_n = 2 - \frac{3}{4}n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_0 = 2 - \frac{3}{4} \times 0 = 2 - 0 = 2$ et $u_1 = 2 - \frac{3}{4} \times 1 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$

PROF: ATMANI NAJIB

2) $u_{n+1}-u_n=\left(2-\frac{3}{4}(n+1)\right)-\left(2-\frac{3}{4}n\right)=2-\frac{3}{4}n-\frac{3}{4}-2+\frac{3}{4}n=-\frac{3}{4}$

Donc : $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{4}=r \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : $(u_n)_n$ une suite arithmétique tel que son premier terme $u_0=2$ et sa raison $r=-\frac{3}{4}$

3) $(u_n)_n$ une suite arithmétique donc : $S=u_0+u_1+\cdots+u_{20}=(20-0+1)\frac{u_0+u_{20}}{2}$

Calculons : $u_{20}=?$

On a : $u_n=2-\frac{3}{4}n$ donc : $u_{20}=2-\frac{3}{4}\times 20=2-3\times 5=2-15=-13$

$S=21\frac{2+(-13)}{2}=21\frac{-11}{2}=-\frac{231}{2}$

Exercice6 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{5u_n-1}{u_n+3} & \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=2 \end{cases}$

Et Soit la suite récurrente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Calculer: u_1 ; v_0

2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$

b) Ecrire v_n en fonction de n

c) En déduire u_n en fonction de n

d) Calculer la somme suivante : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{32}$

Solution : 1) On a : $u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 on : $u_{0+1}=\frac{5u_0-1}{u_0+3}$ donc : $u_1=\frac{5\times 2-1}{2+3}=\frac{9}{5}$

Et on a : $v_n=\frac{1}{u_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Donc : pour n=0 on : $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=\frac{1}{1}=1$

2) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1-u_n-3}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-4}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}$

$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=1$

a) Ecriture de v_n en fonction de n :

PROF. ATMANI NAJIB

On a $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=1$

Donc : $v_n=v_0+nr=1+n\times\frac{1}{4}=1+\frac{n}{4}=\frac{n+4}{4}$

b) Puisque : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ donc $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ c'est-à-dire : $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

Donc : $u_n=\frac{1}{\frac{n+4}{4}}+1=\frac{4}{n+4}+1=\frac{4+n+4}{n+4}=\frac{n+8}{n+4}$

d) On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique donc : $s_n=v_0+v_1+\ldots+v_{32}=(32-0+1)\frac{v_0+v_{32}}{2}$

$s_n=33\frac{1+v_{32}}{2}$ et on a : $v_n=\frac{n+4}{4}$ donc : $v_{32}=\frac{32+4}{4}=9$

Donc : $s_n=33\frac{1+9}{2}=33\times5=165$

Exercice7 : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{1+(n+2)u_n} \; \forall n\in\mathbb{N}^* \\ u_1=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ et on considère la suite

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n=\frac{1}{u_n}-n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

2) a) Ecrire u_n puis v_n en fonction de n

b) Calculer la somme : $s_n=\sum_{k=1}^{k=n}v_k=v_1+v_2+\ldots+v_n$ en fonction de n

Solution :1) Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique

On a : $v_n=\frac{1}{u_n}-n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Donc :

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-(n+1)=\frac{1+(n+2)u_n}{2u_n}-(n+1)=\frac{1+(n+2)u_n-2(n+1)u_n}{2u_n}=\frac{1-nu_n}{2u_n}=\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u_n}-n\right)}$$

Donc : $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ par suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$

et de premier terme : $v_1=2$

2) a) Ecrivons u_n puis v_n en fonction de n

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1=2$

PROF. ATMANI NAJIB

Donc : $v_n = v_1 \times q^{n-1} \Leftrightarrow \boxed{v_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2\times 2^{1-n} = 2^{2-n}}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On a : $v_n = \frac{1}{u_n} - n$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$ donc : $v_n + n = \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n + n}$

Par suite : $\boxed{u_n = \frac{1}{2^{2-n} + n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Calculons la somme : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ en fonction de n

Soit : $n \in \mathbb{N}^*$; $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = v_1 \frac{1-2^n}{1-2} = 2\left(2^n - 1\right) = \boxed{2^{n+1} - 2}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Exercice8 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{3-u_n}$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Calculer : u_2

2) Soit La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n}$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculer : v_1

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = 3v_n - 1$

3)On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $w_n = v_n - \frac{1}{2}$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Déterminer w_n en fonction de n ; puis déduire v_n et u_n en fonction de n :

Solution : 1) Calculons : u_2

$$u_{1+1} = \frac{u_1}{3-u_1} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

2) Soit La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \frac{1}{u_n}$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Calculons : v_1

On a : $v_1 = \frac{1}{u_1}$ donc : $v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{1} = 1$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = 3v_n - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{3-u_n}} = \frac{3-u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - \frac{u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - 1 = 3v_n - 1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_{n+1} = 3v_n - 1$

3)On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $w_n = v_n - \frac{1}{2}$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) →Déterminons w_n en fonction de n :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{2} = 3v_n - 1 - \frac{1}{2} = 3v_n - \frac{3}{2} = 3\left(v_n - \frac{1}{2}\right) = 3w_n$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^* \; w_{n+1}=3w_n$

D'où la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $w_1=v_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $w_n=v_1\times q^{n-1}=\frac{1}{2}\times 3^{n-1}$

→Déduisons v_n et u_n en fonction de n :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$: on a : $w_n=v_n-\frac{1}{2}\Leftrightarrow w_n+\frac{1}{2}=v_n\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times 3^{n-1}+\frac{1}{2}=v_n$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $v_n=\frac{1}{2}\times 3^{n-1}+\frac{1}{2}$

On a : $v_n=\frac{1}{u_n}$ d'où : $u_n=\frac{1}{v_n}=\frac{1}{\frac{1}{2}\times 3^{n-1}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{3^{n-1}+1}{2}}=\frac{2}{3^{n-1}+1}=\frac{2\times 3}{\left(3^{n-1}+1\right)\times 3}=\frac{6}{3^n+3}$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $u_n=\frac{6}{3^n+3}$

Exercice9 : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2 \\ v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}u_n \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0=-3\ ;\ \ v_0=0 \end{cases}$

1) Calculer : u_1 ; v_1 u_2 ; et v_2

2) Montrer que : $u_n\geq -4$: $\forall n\in\mathbb{N}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

3) On pose : $a_n=u_n+4$ et $b_n=v_n-u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Montrer que : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme et écrire a_n en fonction de n

b) Montrer que : $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont en déterminera la raison et le premier terme et écrire b_n en fonction de n

c) En déduire : u_n et v_n en fonction de n

d) Montrer que : $v_n\succ n$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Solution :1) On a : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-2$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $u_{0+1}=\frac{1}{2}u_0-2\Rightarrow u_1=\frac{1}{2}u_0-2\Rightarrow\boxed{u_1=-\frac{7}{2}}$

On a : $v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Pour n=0 : $v_{0+1}=v_0-\frac{1}{2}u_0\Rightarrow v_1=v_0-\frac{1}{2}u_0\Rightarrow\boxed{v_1=\frac{3}{2}}$

PROF. ATMANI NAJIB

Pour n=1 : $u_{1+1}=\frac{1}{2}u_1-2 \Rightarrow u_2=\frac{1}{2}u_2-2 \Rightarrow \boxed{u_2=-\frac{15}{4}}$

Pour n=1 : $v_{1+1}=v_1-\frac{1}{2}u_1 \Rightarrow v_2=v_1-\frac{1}{2}u_1 \Rightarrow \boxed{v_2=\frac{13}{4}}$

2) a) Montrons par récurrence que : $u_n \geq -4$: $\forall n \in \mathbb{N}$

1étapes : n=0 : $u_0=-3 \geq -4$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Supposons que : $u_n \geq -4$

3étapes : Montrons alors que : $u_{n+1} \geq -4$??

On a : $u_{n+1}+4=\frac{1}{2}u_n-2+4=\frac{1}{2}u_n+2=\frac{1}{2}(u_n+4)$ et comme : $u_n+4 \geq 0$

Alors : $u_{n+1}+4 \geq 0$

Donc : $u_{n+1} \geq -4$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq -4$

b) Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}u_n-2-u_n=-\frac{1}{2}(u_n+4)$ et comme : $u_n+4 \geq 0$

Alors : $u_{n+1}-u_n \leq 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$

Par suite : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

3) On pose : $a_n=u_n+4$ et $b_n=v_n-u_n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique :

Soit : $n \in \mathbb{N}$; On a : $a_n=u_n+4$

$$a_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{1}{2}u_n-2+4=\frac{1}{2}(u_n+4)=\frac{1}{2}a_n$$

Par suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme

$a_0=u_0+4=-3+4=1$

Ecrions a_n en fonction de n : comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0=1$ alors : $a_n=a_0\times q^n \Leftrightarrow \boxed{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

b) Montrons que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique :

Soit : $n \in \mathbb{N}$; On a : $b_n=v_n-u_n$

$$b_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\left(v_n-\frac{1}{2}u_n\right)-\left(\frac{1}{2}u_n-2\right)=v_n-u_n-2=b_n-2$$

Donc : $b_{n+1}-b_n=2$

Par suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison : $r=2$ et de premier terme $b_0=v_0-u_0=3$

PROF: ATMANI NAJIB

Ecrions b_n en fonction de n : comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison : $r=2$ et de premier terme $b_0=3$ alors : $b_n=b_0+n\times r \Leftrightarrow \boxed{b_n=3+2n}$

c) Déduisons : u_n et v_n en fonction de n

On a : $\begin{cases} a_n=u_n+4 \\ b_n=v_n-u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n-4=u_n \\ b_n+u_n=v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n=a_n-4 \\ v_n=b_n+a_n-4 \end{cases}$

Donc : $\boxed{\begin{cases} u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-4 \\ v_n=2n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1 \end{cases}}$

d) Montrons que : $v_n \succ n \ ; \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Soit : $n\in\mathbb{N}^*$: $\Rightarrow n\geq 1 \ et \left(\frac{1}{2}\right)^n \succ 0 \Rightarrow 2n\geq 2 \ et \left(\frac{1}{2}\right)^n \succ 0 \Rightarrow n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\succ 0 \Rightarrow 2n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\succ n$

Donc : $v_n \succ n \ ; \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Exercice10 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{u_n+21} \quad \forall n\in\mathbb{N} \text{ et } \alpha\in\mathbb{R} \\ u_0=\alpha \end{cases}$

1)Déterminer les valeurs de α pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante

2)On pose : $\alpha=1$

a) Montrer que $0\prec u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que $u_{n+1}\leq \frac{1}{7}u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

c) Déduire que la suite (u_n) est décroissante

d) Montrer que $u_n\leq\left(\frac{1}{7}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice11 : On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$u_n=\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n+\sqrt{n-1}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1) Montrer que, pour tout entier $k\in \ 1 ; n$

On a : $\frac{1}{n+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{n+\sqrt{k}}\leq\frac{1}{n+1}$.

2)En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{n}{n+\sqrt{n}}\leq u_n\leq\frac{n}{n+1}$.

Exercice12 : 1) La population d'un village de montagne diminue tous les ans de 20 %. Sachant qu'en 1996 elle était de 1 875 habitants, compléter le tableau suivant :

Année	1996	1997	1998	1999	2000
Nombre d'habitants					

2) Montrer que les nombres d'habitants sont des termes d'une suite dont on déterminera la nature

PROF. ATMANI NAJIB

et la raison.

3) À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur :

a) Déterminer la population de ce village en 2010

b) Donner l'année d'extinction de ce village si on suppose la diminution de la population constante

Exercice13 : On admet que si on mélange un litre d'eau à la température T et un litre d'eau à la température T', on obtient deux litres d'eau à la température $\frac{T+T'}{2}$.

On dispose d'un litre d'eau à la température T_0 = 80 °C ; on lui ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres à la température T_1.

On prélève alors un litre sur les deux obtenus, auquel on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres d'eau à la température T_2.

On répète le processus : on prélève un litre sur les deux obtenus, auquel on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres à la température T_3.

1) On fabrique ainsi une suite (T_n) telle que T_{n+1} est la température du mélange d'un litre d'eau à la température T_n et d'un litre d'eau à la température 20°C.

a) Calculer T_1, T_2 et T_3.

b) Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

2) Soit la suite (u_n) telle que pour tout n : $u_n = T_n - 20$

a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de l'entier n.

c) En déduire que pour tout n, $T_n = 20 + \frac{60}{2^n}$.

d) À l'aide d'une calculatrice, déterminer le premier rang n à partir duquel $T_n \leq 21$.

Exercice14 :

1) Quel est le taux d'intérêt mensuel t que l'on doit utiliser pour obtenir un taux d'intérêt annuel T ?

2) On emprunte une somme S à un taux d'intérêt annuel T sur n années. Déterminer le montant du remboursement mensuel R (traite).

3) Vous empruntez 10 000 DH à 5 % l'an sur 12 ans. Déterminez la traite que vous devrez payer mensuellement. Quel est le montant total des intérêts payés à la banque ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB

PROF. ATMANI NAJIB