1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Série N°7 : *LES SUITES NUMERIQUES*

(La correction voir☺ http://www.xriadiat.com)

Exercice 1 : Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r tel que : $u_2 = -1$ et $u_6 = 11$

1) Calculer la raison r de cette suite 2) Ecrire u_n en fonction de n

3) Calculer la somme suivante : $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{15}$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

Exercice 3 : (u_n) est la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{n}$. Déterminer le sens de variation de (u_n)

Exercice 4 : Soit (u_n) la suite de terme général : $u_n = 1 + \frac{1}{n(-2)^n}$ Définie pour n > 0.

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n)

2) On admet les deux résultats suivants :

* pour tout n pair non nul, $(-2)^n \geq 1$,
* pour tout n impair, $(-2)^n \leq -1$.

a) Montrer que pour tout n > 0, on a : $-1 \leq \frac{1}{(-2)^n} \leq 1$.

b) En déduire que pour tout n > 0, on a l'encadrement $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Exercice 5 : Déterminer la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 2008 + \frac{2007}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^3$

et $v_n = \frac{n}{2^n}$ (on pourra comparer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et 1).

Exercice 6 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie sur $\mathbb{R}$ par : $u_n = 2 - \frac{3}{n^2+1}$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Déterminer le sens de variation de cette suite.

Exercice 7 : 1) $(u_n)_n$ désigne une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4.

a) Calculer u_1 ; u_2 et u_3 b) Donner un en fonction de n et calculer u_{19}

2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 3.

a) Calculer v_1 ; v_2 et v_3

b) Donner v_n en fonction de n et calculer v_{10}.

c) Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 8 : 1) Soit $(u_n)_{n\geq0}$ une suite arithmétique. On sait que $u_5 = 125$ et $u_{16} = 48$. Calculer la raison et le premier terme de cette suite.

2) En déduire : u_n en fonction de n.

3) Pour quelle valeur de n a-t-on : $u_n = -127$?

4) A partir de quel rang a-t-on : $u_n \leq -250$?

5) Calculer la somme : $S = u_{1789} + u_{1790} + \ldots + u_{2007}$.

Exercice 9 : Soit $(u_n)_{n\geq1}$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier $u_1 = -5$.

Calculer la somme : $S = \sum_{k=1}^{25}(u_k + k)$

Exercice 10 : Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$

1) Calculer les termes u_1 ; u_2

2) La suite $(u_n)_n$ est-elle arithmétique ? géométrique ?

3) Représenter graphiquement les premiers termes de u_n. Quelles conjectures émettez-vous ?

4) On admet que, pour tout n, u_n n'est pas nul. On pose : $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$.

a) Calculer v_0 ; v_1 et v_2

b) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

c) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{nu_n + 4}{n+1}$.

1) Calculer u_2.

2) Démontrer que la suite (v_n) définie par : $v_n = n\,u_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de (v_n).

3) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

4) En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée.

Exercice 12 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison : $q = \frac{1}{2}$.

1) Calculer les termes : u_1 ; u_2 et u_{20}

2) Montrer que la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{20}$ est égale à $\frac{2^{21}-1}{2^{17}}$

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$.

1) Calculer les 6 premiers termes de cette suite ; que pouvez-vous conjecturer sur son comportement (sens de variation) ?

2) On pose $v_n = u_n - 3$; montrer que v_n est une suite géométrique, donner l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n. Prouver les résultats obtenus de manière divinatoire au a.

3) On considère $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Donner les expressions de s_n et S_n en fonction de n

Exercice 14 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq1}$ définie par : $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{5}$.

1) Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = u_n - \frac{2}{5}$ est une suite géométrique.

2) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. Calculer alors la valeur exacte de u_4.

3) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

4) Déterminer le plus petit entier naturel p à partir duquel $u_n \leq 0{,}401$

5) Exprimer la somme $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

Exercice15 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

Pour : $x \neq -1$ on pose : $f(x) = \frac{4x-2}{x+1}$

1)Étudier les variations de f sur $[1, +\infty[$

2)Démontrer que : $u_n \succ 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$. $\forall n \in \mathbb{N}$

Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et donner l'expression de son terme général.

4)En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 16: On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$

1) Montrer que $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{4}, u_3 = \frac{7}{8}$. La suite (u_n) est-elle géométrique, arithmétique ?

2) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 2n + 6$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

3) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

5) Quelle est la limite de (v_n) ? Celle de (u_n) ?

6) Calculer : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

7) Calculer : $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exercice 17 : On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 mètre. A chaque rebond elle rebondit des 3/4 de la hauteur d'où elle est tombée.

1) On note u_n la hauteur atteinte au nième rebond. Calculer la hauteur atteinte au 2ème rebond, au 10ème, au 1000ème.

2)A quel rebond la hauteur atteinte est-elle inférieure à 10^{-12} mètre ? Quelle est alors la distance parcourue par la balle ?

Exercice 18 : Suites géométriques

On place un capital C de 10 000 DH à 6% par an en capitalisant les intérêts.

1) De combien dispose-t-on au bout d'un an ? de 2 ans ? de n ans ?

2) Au bout de combien d'années le capital initial sera-t-il doublé ?

3) On place C à t% par an. Sachant qu'au bout de 10 ans ce capital est doublé quel est le taux annuel des intérêts ?

4) On rajoute C tous les ans, toujours à 6% par an

Exercice 19 : Un chef d'entreprise paie 60 000 DH par an pour l'entretien de ses machines. Lors du renouvellement du contrat pour les dix prochaines années, une société lui propose deux formules :

Contrat A : Le contrat augmente de 5% par an.

1) Exprimer en fonction de n le montant u_n du contrat lors de la nième année.

2) Calculer le montant du contrat pour la 10ème année.

3) Au bout de combien d'années le contrat dépasserait-il le double du contrat initial ?

4) Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.

Contrat B : Le contrat augmente de 3500 DH par an.

1) Exprimer en fonction de n le montant v_n du contrat lors de la nième année.

2) Calculer le montant du contrat pour la 10ème année.

3) Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.

4) Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercice 20 : Au pays des plantes géantes, les nénuphars poussent en doublant chaque jour leur surface. Un matin un nénuphar éclot au centre d'un étang circulaire d'un rayon de 100 m ; le nénuphar mesure alors 1 cm de rayon.

1) Exprimer la surface S_n du nénuphar après n jours en fonction de l'entier n.

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer le jour au cours duquel le nénuphar recouvrira tout l'étang

Exercice 21 : On considère la suite $(w_n)_{n\geq1}$ définie par : $w_n = -n + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1) Écrire le terme général w_n à l'aide du symbole Σ.

2) Donner une valeur approchée de w_1, w_2 et w_3 à 0,1 près.

Conjecturer la monotonie de la suite (w_n).

3) Démontrer votre conjecture.

Exercice 22 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in]0;1]$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \prec u_n \leq 1$

2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 23 : Considérons la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x+3}$

Et soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = -1$

1) Étudier les variations de f sur $[-2, +\infty[$

2) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante, minorée par −1 et majorée par 6.

Exercice 24 : On Considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 \geq 0$ avec : $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$

1)Étudier f et le signe de $f(x) - x$

2)On suppose : $u_0 \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ Montrer que $u_n \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, puis que (u_n) est croissante.

3) On suppose : $u_0 \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée.

4) On suppose : $u_0 \succ \frac{3}{4}$; Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 25 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1) Monter que la suite (u_n) est croissante

2) Montrer que la suite (u_n) est non majorée (Par absurde) .

Exercice 26 : Récurrence sur deux termes

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$.

1) Montrer que la suite (s_n) définie par : $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire s_n en fonction de n.

2) On pose : $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite (t_n) définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$

Exprimer t_n en fonction de : s_n

3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

(On pourra calculer de deux manières la somme $t_0 + t_1 + \ldots + t_n$.)

Exercice 27 : Suite récurrente

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ *et* $u_0 = 1$

1) Calculer les 10 premiers termes de (u_n).

2) Si $u_n \neq 0$, on pose : $t_n = \frac{1}{u_n}$. Calculez les 10 premiers termes de la suite (t_n).

3) Trouvez une expression de t_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

Exercice 28 : Soit la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}$

1) Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 a-t-on (u_n) est constante ?

2) On prend $u_0 = 2$

a) Calculer les 5 premiers termes de la suite.

b) Soit la fonction : $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Tracer sa courbe représentative (C) ainsi que la droite $(D): y = x$

c) Représenter graphiquement la construction des premiers points de la suite (u_n) et conjecturer son comportement (sens de variation, majorant, minorant,).

Exercice 29 : Suite linéaire et aires de triangles

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{25}{8}$ et par la relation $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{25}{8}$.

Partie I

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n)

2) En utilisant une représentation graphique adaptée émettre quelques conjectures sur le comportement de (u_n) : sens de variation

3) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{25}{2}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Déterminer le terme général v_n en fonction de n.

c) En déduire le terme général u_n en fonction de n.

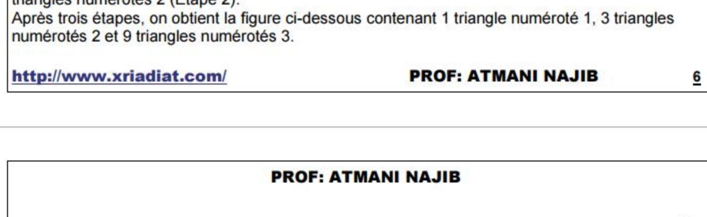
Partie II

On considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que BA = BC = 5.

On divise ce triangle en 4 triangles isocèles rectangles obtenus en joignant les milieux des côtés et on numérote 1 le triangle central (Etape 1).

Chacun des 3 triangles non numérotés est alors divisé en 4 triangles isocèles rectangles obtenus comme précédemment et on numérote 2 le triangle central comme précédemment. Il y a donc 3 triangles numérotés 2 (Etape 2).

Après trois étapes, on obtient la figure ci-dessous contenant 1 triangle numéroté 1, 3 triangles numérotés 2 et 9 triangles numérotés 3.



Pour tout entier n différent de 1, on désigne par a_n l'aire de la surface totale de tous les triangles numérotés de 1 à n après n étapes.

1)Calculer l'aire du triangle ABC.

2) a)La différence $a_2 - a_1$ représente l'aire des triangles numérotés 2.

La différence $\frac{25}{2} - a_1$ représente l'aire restante (non numérotée) à l'étape 1.

Combien vaut le rapport $\frac{a_2 - a_1}{\frac{25}{2} - a_1}$?

b) La différence $a_3 - a_2$ représente l'aire des triangles numérotés 3.

La différence $\frac{25}{2} - a_2$ représente l'aire restante (non numérotée) à l'étape 2.

Combien vaut le rapport $\frac{a_3 - a_2}{\frac{25}{2} - a_2}$?

3) En déduire alors que $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{25}{8}$.

Exercice 30 : Les lettres de Gaston (c)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$.

1) Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives : $y = x$ et $y = \frac{3}{4}x + 200$, puis les premiers termes de la suite (u_n).

2) On pose pour tout n : $v_n = u_n - 800$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n

Au bout de combien de temps a-t-on : $u_n < 810$?

3) Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin .» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… » Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4) La question a. est indépendante de ce qui précède

a) Si (x_n) est une suite croissante, on définit (y_n) par $y_n = \frac{x_0 + x_1 \ldots + x_n}{n+1}$.

Montrer que (y_n) est croissante et que pour tout n on a : $y_n \leq x_n$.

Que peut-on dire pour une suite (x_n) décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

b) On appelle M_n la quantité de lettres qu'il y eu en moyenne sur le bureau de Gaston pendant les n premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres).

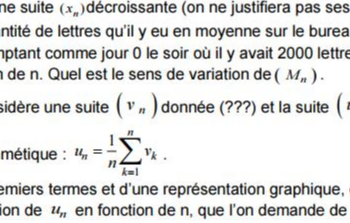
Exprimer M_n en fonction de n. Quel est le sens de variation de (M_n).

Généralisation : On considère une suite (v_n) donnée (???) et la suite (u_n) dont le terme général u_n est la moyenne arithmétique : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.

A partir du calcul des premiers termes et d'une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de u_n en fonction de n, que l'on demande de démontrer.

Solution :

1.



2) $v_n = u_n - 800$ donc : $v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = \frac{3}{4}u_n + 200 - 800 = \frac{3}{4}(v_n + 800) - 600 = \frac{3}{4}v_n$.

On a donc : $v_0 = u_0 - 800 = 2000 - 800 = 1200$ et $v_n = 1200\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Donc : $u_n = v_n + 800 = 1200\left(\frac{3}{4}\right)^n + 800$.

n	u_n	n	u_n
0	2000	9	890,1016235
1	1700	10	867,5762177
2	1475	11	850,6821632
3	1306,25	12	838,0116224
4	1179,6875	13	828,5087168
5	1084,765625	14	821,3815376
6	1013,574219	15	816,0361532
7	960,1806641	16	812,0271149
8	920,135498	17	809,0203362

Pour : n = 17 on a $u_n < 810$.

3) Le pauvre Gaston L. n'arrivera jamais à éliminer son courrier en retard… : il en restera toujours au moins 800. Et m'oiselle Jeanne sera bien déçue…

4) a) Remarquons que :

$y_n = \frac{x_0 + \ldots + x_n}{n+1} \Rightarrow x_0 + \ldots + x_n = (n+1)y_n$; cherchons y_{n+1} :

$y_{n+1} = \frac{x_0 + x_1 \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+2} = \frac{(n+1)y_n + x_{n+1}}{n+2}$.

Si (y_n) est croissante on a : $y_{n+1} \geq y_n$

D'où : $\frac{(n+1)y_n + x_{n+1}}{n+2} \geq y_n \Leftrightarrow (n+1)y_n + x_{n+1} \geq (n+2)y_n \Leftrightarrow x_{n+1} \geq y_n$.

Comme (x_n) est croissante, on a $x_0 + x_1 \ldots + x_n \leq x_{n+1} + x_{n+1} + \ldots + x_{n+1} = (n+1)x_{n+1}$

Donc : $y_n = \frac{x_0 + x_1 \ldots + x_n}{n+1} \leq \frac{(n+1)x_{n+1}}{n+1} = x_{n+1}$. CQFD.

En fait on avait : $x_0 + x_1 \ldots + x_n \leq x_n + x_n + \ldots + x_n = (n+1)x_n \Rightarrow y_n \leq \frac{(n+1)x_n}{n+1} = x_n$

Voici un exemple sur une suite décroissante : $x_{n+1} = 0{,}9x_n$.

n	x_n	$\sum_{k=0}^{n} x_k$	$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$
0	10	10	10
1	9	19	9,5
2	8,1	27,1	9,03333333
3	7,29	34,39	8,5975
4	6,561	40,951	8,1902
5	5,9049	46,8559	7,80931667
6	5,31441	52,17031	7,45290143
7	4,782969	56,953279	7,11915988
8	4,3046721	61,2579511	6,80643901
9	3,87420489	65,132156	6,5132156
10	3,4867844	68,6189404	6,23808549
11	3,13810596	71,7570464	5,97975386
12	2,82429536	74,5813417	5,73702629
13	2,54186583	77,1232075	5,50880054
14	2,28767925	79,4108868	5,29405912
15	2,05891132	81,4697981	5,09186238
16	1,85302019	83,3228183	4,90134225
17	1,66771817	84,9905365	4,72169647
18	1,50094635	86,4914828	4,55218331
19	1,35085172	87,8423345	4,39211673
20	1,21576655	89,0581011	4,24086196
21	1,09418989	90,152291	4,09783141
22	0,9847709	91,1370619	3,96248095

La suite (y_n) semble également décroissante.

On peut remarquer simplement que y_n est la moyenne des termes de x_n.

b) $M_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1} = \frac{v_0 + 800 + v_1 + 800 + \ldots + v_n + 800}{n+1} = \frac{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}{n+1} + \frac{800(n+1)}{n+1}$

or (v_n) est géométrique donc : $v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1200\frac{1-(3/4)^{n+1}}{1/4} = 4800\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$

D'où : $M_n = 4800\frac{1-0{,}75^{n+1}}{n+1} + 800$.

Comme (u_n) est décroissante, (M_n) doit être également décroissante.

Exercice 31 : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = u_n(2 - u_n) \end{cases}$.

1) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative (C) de la fonction f : $f(x) = x(2-x)$ ainsi que la droite $(D): y = x$

c)Utiliser (D) et (C) pour construire sur l'axe des abscisses les points : A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives : u_1, u_2, u_3.

2) a) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$.

b) Montrer que (u_n) est croissante.

3) On considère la suite : $v_n = 1 - u_n$.

a) Montrer que : $v_{n+1} = v_n^2$.

b) Montrer par récurrence que $v_n = v_0^{2^n}$. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n.

c) Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

Exercice 53 : Le nombre d'or

Les questions Q_1, Q_2, … sont à rédiger classiquement sur une copie.

Les questions T_1, T_2, … sont à traiter à l'aide d'un tableur et à faire vérifier par le professeur.

1ère partie : définition du nombre d'or :

Le nombre d'or est le nombre irrationnel noté par la lettre grecque φ (prononcer phi) et égal à $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Q_1 : Donner une valeur approchée à 10^{-6} près du nombre d'or φ.

T_1. Donner une valeur approchée à 10^{-12} près du nombre d'or φ.

2ème partie : construction géométrique du nombre d'or :

Construire un carré ABCD de côté 1 et marquer le milieu I de [AB].

Tracer le cercle de centre I et de rayon IC ; il coupe la demi-droite [AB) en E.

Construire le rectangle AEFD.

Q_2 : Calculer la valeur exacte de IC puis démontrer que : $AE = DF = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

NB : le rectangle AEFD est appelé rectangle d'or car le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au nombre d'or.

3ème partie : le nombre d'or solution d'une équation :

Q_3 : Montrer que le nombre d'or φ est solution de l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$.

Q_4 : Démontrer alors que l'inverse de l'opposé de ce nombre φ est aussi solution de cette équation.

4ème partie : Fractions en cascade :

On considère la suite de fractions : $F_1 = 2$; $F_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $F_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$; $F_4 = 1 + \frac{1}{1+F_3}$;…

Q_5 : Simplifier ces fractions et en donner une valeur approchée à 10^{-6} près.

Q_6 : Reprendre les calculs en remplaçant 2 par 1.

T_2 : Sur un tableur, saisir un nombre A positif dans la cellule A1.

Dans la cellule A2, marquer « = 1 + 1/A1 », puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 30.

Observer les décimaux obtenus et comparer au nombre d'or.

NB : On demandera l'écriture des nombres décimaux avec 12 décimales.

T_3 : Recommencer en remplaçant A par un autre nombre positif.

5ème partie : la suite de Fibonacci

Léonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175-1250), était un commerçant et un grand voyageur. Son livre Liber abbaci, qui est principalement consacré aux calculs commerciaux, est aussi un recueil de petits problèmes dont celui très célèbre sur l'évolution d'une population de lapins qui l'amène à introduire la suite de nombres entiers suivants :

- les deux premiers termes sont 0 et 1,
- chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents ;

Voici donc les 7 premiers termes : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Q_7 : a. Continuer cette suite jusqu'au 15ème terme.

b) Calculer le quotient du 12ème terme par le 11ème, puis le quotient du 13ème terme par le 12ème, puis le quotient du 14ème par le 13ème et enfin le 15ème par le 14ème. Que constate-t-on ?

T_4 : a) À l'aide d'un tableur, calculer les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

b) Calculer la suite des quotients obtenus en divisant un terme par son précédent.

Que constate-t-on ?

6ème partie : les puissances de φ

Q_8 : a) Vérifier que : $\varphi^2 = \varphi + 1$.

b) Montrer que : $\varphi^3 = 2\varphi + 1$ en partant de l'égalité : $\varphi^3 = \varphi^2 \times \varphi$ et en remplaçant φ^2 par $\varphi + 1$.

Montrer de la même façon que : $\varphi^4 = 3\varphi + 2$.

c) Exprimer de la même façon φ^5, φ^6 et φ^7 en fonction de φ.

Q_9 : Montrer que : $\frac{1}{\varphi} = \varphi^{-1} = \varphi - 1$; exprimer de même φ^{-2}, φ^{-3} et φ^{-4} en fonction de φ.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien
Prof : ATMANI NAJIB