1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°2 : *CALCUL TRIGONOMETRIQUE*

Exercice1 : 1) Calculer : $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$

2) En déduire : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$

Solution : 1) Methode1 : $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Methode2 : On a $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$ ou $\cos\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{12}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\frac{\pi}{12}\succ 0$ donc : $\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

On a : $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$

Donc : $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1-\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ ou $\sin\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

Or $0\prec\frac{\pi}{12}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{12}\succ 0$ donc : $\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

Donc : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$\tan\frac{\pi}{12}=\frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{4-3}}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3} \text{ car } 2>\sqrt{3}$$

2) On a : $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}$

Donc : $\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}=-\frac{1}{2-\sqrt{3}}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

Exercice2 : Soit $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

1) Montrer que : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\frac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$

2) Calculer : a) $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

Solution : 1) Soit $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Montrons que : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\frac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$

C'est-à-dire on montre que : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)\overset{?}{=}\sin(8x)$

On a : $\sin(x)\times\cos(x)=\frac{1}{2}2\sin(x)\times\cos(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{2}\sin(2x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}2\sin(2x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{4}\sin(4x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}2\sin(4x)\times\cos(4x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=8\times\frac{1}{8}\sin(8x)$

Alors : $8\sin(x)\times\cos(x)\cos(2x)\times\cos(4x)=\sin(8x)$

PROF: ATMANI NAJIB

Par suite : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$ si $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) Calculons : a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$

On sait que : $\cos(x)\times\cos(2x)\times\cos(4x)=\dfrac{\sin(8x)}{8\sin(x)}$ si $x\neq k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Pour : $x=\dfrac{\pi}{7}$ On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)=\frac{\sin\left(8\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}=\boxed{-\frac{1}{8}}$$

Calculons : b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\dfrac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\dfrac{4\pi}{9}\right)$

Pour : $x=\dfrac{\pi}{9}$ On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{\sin\left(8\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{8\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=\boxed{\frac{1}{8}}$$

Calculons : c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{18}\right)\times\sin\left(\dfrac{5\pi}{18}\right)\times\sin\left(\dfrac{7\pi}{18}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{18}\right)\times\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{18}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{18}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{\frac{1}{8}}$$

Exercice3 : Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=-2\cos^2 x\times\cos 2x$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=5\cos 2x+7$

Solution :1) $\sin^2 2x-\cos 2x-1=(2\cos x\sin x)^2-2\cos^2 x+1-1$

$$=4\cos^2 x\sin^2 x-2\cos^2 x=-2\cos^2 x\cos 2x$$

2) $2\sin^2 x+12\cos^2 x=2\sin^2 x+12\left(1-\sin^2 x\right)=-10\sin^2 x+12=\dfrac{-10}{2}(1-\cos 2x)+12=-5(1-\cos 2x)+12=5\cos 2x+7$

Exercice4 : Montrer que :1) $\sin\dfrac{3\pi}{11}+\sin\dfrac{7\pi}{11}=2\sin\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$

2) $\sin\dfrac{3\pi}{11}-\sin\dfrac{7\pi}{11}=-2\cos\left(\dfrac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right)$

3) En déduire que : $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\dfrac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

PROF: ATMANI NAJIB

PROF: ATMANI NAJIB

Solution :1) $\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}=2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=2\sin\frac{5\pi}{11}\cos\frac{2\pi}{11}$

2) $\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11}+\frac{7\pi}{11}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11}-\frac{7\pi}{11}}{2}\right)$

$\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}=2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)=-2\cos\frac{5\pi}{11}\sin\frac{2\pi}{11}$

3) $\frac{\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}}{\sin\frac{3\pi}{11}-\sin\frac{7\pi}{11}}=-\frac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

Exercice5 : On pose : $a=\cos\frac{\pi}{9}$ et $b=\sin\frac{\pi}{9}$

Ecrire en fonction de : a et b les expressions suivantes :

1) $A=\cos\frac{8\pi}{9}+\sin\left(-\frac{10\pi}{9}\right)$ 2) $B=\sin\frac{7\pi}{18}+\cos\frac{11\pi}{9}$ 3) $C=\sin\frac{11\pi}{18}\times\sin\frac{7\pi}{18}\times\cos\frac{8\pi}{9}$

Solution :1)

$A=\cos\frac{8\pi}{9}+\sin\left(-\frac{10\pi}{9}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{9}\right)=-\cos\frac{\pi}{9}-\left(-\sin\frac{\pi}{9}\right)=-\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}$

Donc: $\boxed{A=-a+b}$

2) $B=\sin\frac{7\pi}{18}+\cos\frac{11\pi}{9}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)+\cos\left(\pi+\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{2\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}-\cos\left(2\frac{\pi}{9}\right)$

Or on sait que : Pour tout réel x on a : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

Donc: $B=\cos\frac{\pi}{9}-\left(2\cos^2\frac{\pi}{9}-1\right)=\cos\frac{\pi}{9}-2\cos^2\frac{\pi}{9}+1$

Donc: $\boxed{B=-2a^2+a+1}$

3) $C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{-a^3}$

Exercice6 : 1) Calculer les expressions suivantes :

$A=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$ 2) $B=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$

2) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

Solution :1) On sait que : $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ (1)

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ (2)

Donc: $A=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

PROF: ATMANI NAJIB

$$B=\cos\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$C=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{9}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\right)=-\cos^3\left(\frac{\pi}{9}\right)=\boxed{-a^3}$$

2) Montrons que : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$

$$\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{18}\right)$$

Donc: $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{18}\right)=2\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)$

Exercice7 : 1) Soit $\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ Tel que : $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$

Calculer : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$

2) Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ Tel que : $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

Montrer : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

Solution :1) On a : $\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ et $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

On sait que : $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\times-\frac{12}{13}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{6}{13}$

Calculons : $\cos\alpha$

On sait que : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ donc : $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169}$

Donc : $\cos\alpha=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$ ou $\cos\alpha=\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$ et puisque : $\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ alors : $\cos\alpha=\frac{5}{13}>0$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{13}+\frac{6}{13}=\frac{5\sqrt{3}+12}{26}$

2) Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ Tel que : $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$

Montrer : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

On sait que : $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Calculons : $\cos\alpha$ et $\cos\beta$

Puisque : $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors : $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

PROF: ATMANI NAJIB

On sait que : $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ donc : $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

Donc : $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ou $\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ et puisque : $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors : $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Donc : $\cos(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ comme : $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors : $0<\alpha+\beta<\pi$

Alors : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$ et $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$0<\frac{\pi}{4}+2k\pi<\pi\Leftrightarrow 0<\frac{1}{4}+2k<1\Leftrightarrow -\frac{1}{8}<k<\frac{3}{8}\Rightarrow k=0$

Donc : $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}+2\times0\times\pi=\frac{\pi}{4}$

Exercice8 : Montrer que/ $\forall x\in\mathbb{R}$: $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=-\sin 4x\times\sin x$

Solution : $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)$

$$\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}=2\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{3x}{2}=-2\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}+\frac{3x}{2}}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}}{2}\right)=-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Donc: $\cos^2\frac{5x}{2}-\cos^2\frac{3x}{2}=2\cos(2x)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times-2\sin(2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

$$=-2\cos(2x)\times\sin(2x)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)=-\sin(4x)\sin x$$

Exercice9 : Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$

1) $\sin 3x=\sin x\times\left(3-4\sin^2 x\right)$

2) $\cos 3x=\cos x\left(4\cos^2 x-3\right)$

3) $\cos(4x)=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$

4) $\sin(4x)=4\sin x\left(2\cos^3 x-\cos x\right)$

5) $\cos^3 x=\frac{1}{4}(3\cos x+\cos 3x)$

Solution :1) $\sin 3x=\sin(2x+x)=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x$

$=2\sin x\cos^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x=2\sin x\left(1-\sin^2 x\right)+\left(1-2\sin^2 x\right)\sin x$
$=2\sin x-2\sin^3 x+\sin x-2\sin^3 x=3\sin x-4\sin^3 x=\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)$

PROF: ATMANI NAJIB

2) $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x\cos 2x - \sin 2x\sin x$

$= \cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) + \sin x \times 2\cos x\sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\sin^2 x$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\left(1-\cos^2 x\right) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^2 x$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x\left(4\cos^2 x - 3\right)$

3) $\cos(4x) = \cos(2\times 2x) = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1$

$= 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

4) $\sin(4x) = 4\sin x\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) = 4\sin x\left(2\cos^3 x - \cos x\right)$

$\sin(4x) = \sin(2\times 2x) = 2\sin 2x\cos 2x = 2\times 2\sin x\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)$

5) $\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$ ؟؟

Methode1: $\frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) = \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos(x+2x)\right) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(3\cos x + \cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) - 2\sin x\sin x\cos x\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 3\cos x\right) = \frac{1}{4}\left(4\cos^3 x\right) = \cos^3 x$

Methode2: $\cos^3 x = \cos^2 x \times \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} \times \cos x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 2x \times \cos x)$

$\cos^3 x = \frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **2)** $\sin(2x) = \cos(3x)$ **3)** $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{3}$

Solution : 1) On a : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

PROF: ATMANI NAJIB

Équivaut à : $2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a : $\sin(2x)=\cos(3x)$ équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $-x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ cad $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice11 : Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3}\cos x+\sin x$; $a=\sqrt{3}$ et $b=1$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x\right)$

Donc : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

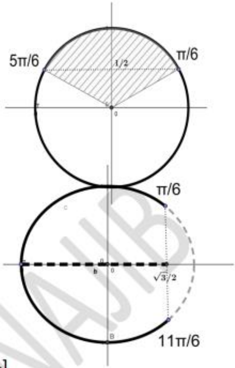
$\sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Après encadrement dans : $[0;2\pi]$ On trouve : $S=\left\{0;\frac{\pi}{3};2\pi\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice12 : Résoudre dans $[0\,;2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$



Solution : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0\,;2\pi[$

On trouve que : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ Donc : $S = \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

Exercice13 : a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

Solution : 1) a) On pose $t = \sin x$ et l'équation $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ devient : $2t^2 - 9t - 5 \leq 0$
On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:
Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \frac{9-\sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et $t_2 = \frac{9+\sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ donc : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2$ équivaut à : $\frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0,08 \leq k \leq 1,02$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

PROF: ATMANI NAJIB

Donc $0 \leq \frac{7}{6}+2k \leq 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$

Donc $-0,5 \leq k \leq 0,41$ et $k \in \mathbb{Z}$

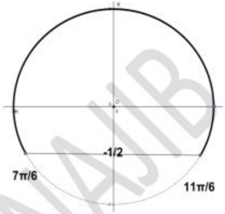
Donc $k=0$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$ ssi $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$ c'est-à-dire : $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$



Équivaut à : $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$

Équivaut à : $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

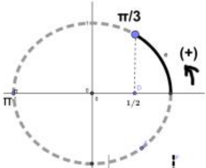
L'arc en trait plein correspond à tous les points $M(x)$

Tel que : x vérifie $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

Donc $S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$

2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie dans $[0\,;\pi]$ si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc : $D = [0\,;\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

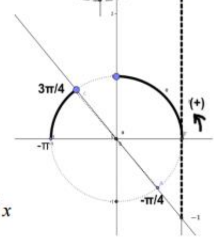


$2\cos x - 1 \geq 0$ Équivaut à : $\cos x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \geq \cos\frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \geq 0$ Équivaut à : $\tan x \geq -1$ si et seulement si : $\tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$		$-$	
$\tan x + 1$		$+$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$produit$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Donc : $S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$



Exercice14: Soit $x \in \mathbb{R}$ on pose : $A(x) = 2\cos^3 x - \cos x + 2\sin x - 2\sin^3 x$

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin x - \sin^3 x = \frac{1}{2}\sin 2x \times \cos x$ et $2\cos^3 x - \cos x = \cos 2x \times \cos x$

PROF: ATMANI NAJIB

b) En déduire que : $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations : $A(x)=0$

3) Montrer que : $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$: $A(x)\geq 0$

Solution : 1) a) →Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $\sin x-\sin^3 x=\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x$

On sait que : $\sin 2x=2\sin x\times\cos x$

$$\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x=\frac{1}{2}2\sin x\times\cos x\times\cos x=\sin x\times\cos^2 x=\sin x\times\left(1-\sin^2 x\right)=\sin x-\sin^3 x$$

→Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $2\cos^3 x-\cos x=\cos 2x\times\cos x$

On sait que : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$$\cos 2x\times\cos x=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x=2\cos^3 x-\cos x$$

b) Déduisons que : $A(x)=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos x$

On a : $A(x)=2\cos^3 x-\cos x+2\sin x-2\sin^3 x$

Donc : $A(x)=\cos 2x\times\cos x+2\left(\frac{1}{2}\sin 2x\times\cos x\right)$

Donc : $A(x)=\cos 2x\times\cos x+\sin 2x\times\cos x$

Donc : $A(x)=\cos x\left(\cos 2x+\sin 2x\right)$

Donc : $A(x)=\sqrt{2}\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right)=\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$

Donc : $A(x)=\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right)$

Donc : $A(x)=\sqrt{2}\cos x\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations : $A(x)=0$

$$A(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos x\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)=0\Leftrightarrow\cos x=0\ ou\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ou\ \ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ ou\ \ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\quad ;\ k\in\mathbb{Z}$$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

PROF: ATMANI NAJIB

3) Montrons que : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$: $A(x) \geq 0$

On a : $A(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos x$

Comme : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $\cos x > 0$

Et $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right] \subset \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Alors : $\cos x > 0\ (1)$: $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$

Soit : $x \in \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow cox\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \quad (2)$

(1) et $(2) \Rightarrow A(X) \geq 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$

Exercice15 : 1) Montrer que : $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$

2) Considérons l'équation : (E): $2cosx - 2sinx - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) En posant : $t = \tan\frac{x}{2}$ résoudre l'équation (E) (remarquer que $4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$

3) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

PROF: ATMANI NAJIB