1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

# Correction Série N°3 : *CALCUL TRIGONOMETRIQUE*

**Exercice1 :** 1) Vérifier que : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}$

2)a) Monter que : $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $\cos 3x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

b) En déduire les valeurs de : $\cos\frac{\pi}{10}$ *et* $\sin\frac{\pi}{10}$

3) Monter que : $\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$ ( on remarquera que : $\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$

**Solution :** 1) Vérifions que : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}$

On a : $\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}$

Donc : $\cos\frac{3\pi}{10}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)=\sin\frac{2\pi}{10}$

2)a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $\cos 3x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

$\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos(x)\times\cos(2x)-\sin(x)\times\sin(2x)\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$

Comme on a : $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $\cos 3=\cos x\times\left(1-2\sin^2 x\right)-2\sin^2 x\cos x=\cos x\times\left(1-2\sin^2 x-2\sin^2 x\right)=\cos x\times\left(1-4\sin^2 x\right)$

b) Déduisons les valeurs de : $\cos\frac{\pi}{10}$ *et* $\sin\frac{\pi}{10}$

On sait que : $\forall x\in\mathbb{R}$ ; $\cos 3x=\left(1-4\sin^2 x\right)\cos x$ donc pour : $x=\frac{\pi}{10}$

$\cos\frac{3\pi}{10}=\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{10}$ et on a : $\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}$

Donc : $\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{10}\Leftrightarrow\left(1-4\sin^2\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$ car : $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow 1-4\sin^2\frac{\pi}{10}=2\sin\frac{\pi}{10}$ car $\cos\frac{\pi}{10}\neq 0\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}-1=0$ On : $\Delta=b^2-4ac=4$

Donc : $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ ou $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ or $0\prec\frac{\pi}{10}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\sin\frac{\pi}{10}>0$

Donc : $\sin\frac{\pi}{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=1-\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$ C'est-à-dire : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$





Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=-\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

De plus on a : $0\prec\frac{\pi}{10}\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)>0$

Par suite : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}$

3) Montrons que : $\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$

On a: $\frac{7\pi}{30}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$ donc: $\sin\frac{7\pi}{30}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$\sin\frac{7\pi}{30}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$

**Exercice2 :** Soit $x\in\mathbb{R}$ ; Montrer que :

$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$ et $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

**Solution :** Montrons que : $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

On sait que : $\cos p+\cos q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{x+x+\frac{2\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

Montrons que : $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

On sait que : $\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{x+x+\frac{2\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{x-x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$





**Exercice3 :** $P(x)=\sin 2x-\sin x$ et $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x$

Montrer que : $P(x)=\sin x(2\cos x-1)$ et $P(x)=\cos x(2\cos x+1)$

**Solution :** $Q(x)=1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x+2\cos^2 x=\cos x(1+2\cos x)$

$P(x)=\sin 2x-\sin x=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)$

**Exercice4 :** 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $(E)$ : $2\cos^2 x-3\sqrt{3}\cos x+3=0$

2) En déduire les solutions de l'équation $(E)$ dans $[0;\pi]$

**Solution : 1)** On pose $t=\cos x$ et l'équation $(E)$ devient : $2t^2-3\sqrt{3}t+3=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3\sqrt{3}t+3$ :

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=\left(-3\sqrt{3}\right)^2-4\times 2\times 3=27-24=3$

Les racines sont : $t_1=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $t_2=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2\times 2}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times 2}=\sqrt{3}$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x=\sqrt{3}$

• Pour : $\cos x=\sqrt{3}$

On sait que : $-1\leq\cos x\leq 1$ donc l'équation $\cos x=\sqrt{3}$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

• Pour : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,;\,\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a $k$

a) Pour : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Prenons par exemple la valeur $k=-1$ et remplaçons on obtient : $x=\frac{\pi}{6}-2\pi=-\frac{11\pi}{6}$ ; cette valeur n'appartient pas à $[0;\pi]$ ; il est donc évident que des valeurs de $k$ inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k=0$ : on obtient $x=\frac{\pi}{6}$ ; cette valeur appartient à $[0;\pi]$.

Pour $k=1$ : $x=\frac{\pi}{6}+2\pi\notin[0;\pi]$

Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à : 1

Donc : la seule valeur dans $[0;\pi]$ est : $x=\frac{\pi}{6}$

b) Pour : $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

La même démarche que précédemment

Pas de valeurs dans $[0;\pi]$ ; Conclusion : $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$





**Exercice5 :** Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Solution :** $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{11\pi}{6}$ et $x=\frac{\pi}{6}$ (on utilisant les encadrements)

$\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x<\cos\frac{\pi}{6}$

En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

**Exercice6 :** Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

**Solution :**

• L'inéquation $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$ est définie si et seulement si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[-\pi;\pi]$ alors : $x\neq\frac{\pi}{2}$ et $x\neq-\frac{\pi}{2}$

• Résolution de l'équation : $3\tan x-\sqrt{3}=0$

On a $3\tan x-\sqrt{3}=0$ Équivaut à : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[-\pi;\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$




En utilisant le cercle trigonométrique on compare $\tan x$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans $[-\pi;\pi]$

On trouve que : $\tan x\succ\frac{\sqrt{3}}{3}$

Équivaut à : $x\in\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

**Exercice7 :** 1) Soit $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\alpha=\frac{1}{7}$ et soit $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que : $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$





1)Calculer : $\tan(2\beta)$

2) En déduire que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$

**Solution :**1) On a : $\tan(2\beta)=\frac{2\tan(\beta)}{1-\tan^2(\beta)}$ $\forall\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Or $\tan(\beta)=\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}\Rightarrow\tan^2(\beta)=\frac{\sin^2(\beta)}{\cos^2(\beta)}=\frac{\sin^2(\beta)}{1-\sin^2(\beta)}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9}$ et comme $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Alors : $\tan(\beta)>0$ donc : $\tan(\beta)=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$

Par suite : $\tan(2\beta)=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\boxed{\frac{3}{4}}$

2) Déduisons que : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}$

Calculons : $\tan(\alpha+2\beta)$

On a : $\tan(\alpha+2\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(2\beta)}{1-\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{3}{4}}=\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}}=1$

Donc : $\tan(\alpha+2\beta)=1$

Donc : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Mais on a : $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\beta\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Donc : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $0<\beta<\frac{\pi}{4}$

Donc : $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ et $0<2\beta<\frac{\pi}{2}$

Donc : $0<\alpha+2\beta<\pi$

Donc : $0<\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi$ c'est-à-dire : $0<\frac{1}{4}+k<1\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<k<\frac{3}{4}\Rightarrow\boxed{k=0}$

Par suite : $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{4}+0\times\pi=\frac{\pi}{4}$

**Exercice8 :** Soit $x\in\left]0\,;\,\frac{\pi}{3}\right[$ et on pose : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}$

1) Montrer que : $F(x)=4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}{\sin 2x}$





3) En déduire que : $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4$

**Solution :** 1) On a : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}$ et on sait que : $\cos x\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$ (1)

Transformation de: $\cos x-\sqrt{3}\sin x$ ; $a=1$ et $b=-\sqrt{3}$

Donc : $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

Donc : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

Donc : $\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ (2)

De: (1) et (2) : $F(x)=\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{\cos x\sin x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}\sin 2x}=4\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x}$

$F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4\frac{\cos\left(\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(2\frac{\pi}{18}\right)}=4\frac{\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}$ et $\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right)=\sin\frac{\pi}{9}$

Donc : $F\left(\frac{\pi}{18}\right)=4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}=4$

**Exercice9 :** Soit $x\in\mathbb{R}$

1) Factoriser les expressions suivantes : $\sin 5x-\sin 3x$ et $\sin 5x+\sin 3x$

2) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 2x\times\sin 8x$

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0$

**Solution :** 1) On sait que : $\sin p+\sin q=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p-\sin q=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Donc : $\sin 5x+\sin 3x=2\sin\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)=2\sin(4x)\cos(x)$

Donc : $\sin 5x-\sin 3x=2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)=2\cos(4x)\sin(x)$

2) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}:\sin^2 5x-\sin^2 3x=\sin 2x\times\sin 8x$

$\sin^2 5x-\sin^2 3x=(\sin 5x+\sin 3x)(\sin 5x-\sin 3x)=2\sin(4x)\cos(x)\times 2\sin(x)\cos(4x)$

Donc : $\sin^2 5x-\sin^2 3x=2\sin(4x)\cos(4x)2\cos(x)\times\sin(x)=\sin(8x)\sin(2x)$

Car : $2\cos(X)\times\sin(X)=\sin(2X)$

3) Déduisons les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0$





$\cos 6x=\cos(2(3x))=\cos^2 3x-\sin^2 3x=1-2\sin^2 3x$

$2\sin^2 5x+\cos 6x-1=0\Leftrightarrow 2\sin^2 5x+1-2\sin^2 3x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 5x-2\sin^2 3x=0\Leftrightarrow\sin^2 5x-\sin^2 3x=0\Leftrightarrow\sin 2x\times\sin 8x=0$

$\Leftrightarrow\sin 2x=0$ *ou* $\sin 8x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi$ *ou* $8x=k\pi$ ; $k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ *ou* $x=\frac{k\pi}{8}$ ; $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{k\pi}{2};\frac{k\pi}{8}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

**Exercice10 :** Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

1) Déterminer : $D_f$ le domaine de définition de la fonction $f$

2) Résoudre dans $D_f$ l'équation : $f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

3) Montrer que : $\forall x\in D_f$ : $f(x)=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

4) Calculer : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

**Solution :** 1) On a $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1+\cos x\neq 0\}$

$1+\cos x=0\Leftrightarrow\cos x=-1\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq(2k+1)\pi\}=\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

2) Résolvons dans $D_f$ l'équation : $f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Soit : $x\in\mathbb{R}-\{(2k+1)\pi;k\in\mathbb{Z}\}$

$f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Leftrightarrow\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Leftrightarrow 1-\cos x=(1+\cos x)\left(3-2\sqrt{2}\right)$

$\Leftrightarrow 1-3+2\sqrt{2}=\cos x+\left(3-2\sqrt{2}\right)\cos x\Leftrightarrow\cos x\left(4-2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2\Leftrightarrow\cos x=\frac{2\sqrt{2}-2}{4-2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow\cos x=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{\pi}{4}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) Montrons que : $\forall x\in D_f$ : $f(x)=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

On a : $\cos x=\cos\left(2\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$





Donc : $1+\cos x=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Et On a : $1-\cos x=1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $f(x)=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$

4) Calculons : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et en déduisons que : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{6-4\sqrt{2}}{2}=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

D'autre part on a : $f(x)=\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ donc : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\tan\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right)\right)^2=\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$

Alors : $\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Alors : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1>0$ ou $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}+1<0$ et comme $\frac{\pi}{8}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$

Par suite : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

**Exercice11 :** Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

1) Calculer : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équations : $f(x)=0$

**Solution :** 1) On a : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2\frac{\pi}{6}\right)-\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+2$

Donc : $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2$

Donc : $\boxed{f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2}$





2) Montrons que : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

On a : $f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

On sait que : $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $f(x)=2\cos^2 x-1+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+2$

D'autre part : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=\sin^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Donc : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=1-\cos^2 x+3\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x$

Donc : $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x-\sqrt{3}\cos x+1$

Alors : $f(x)=\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)$

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équations : $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$ ou $\sin x+\sqrt{3}\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=0$ ou $2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x=0$ ou $2\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin x+\cos\frac{\pi}{6}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$ ou $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

Donc : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi;-\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

*C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien*