

1er BAC Sciences Expérimentales BIOF
1er BAC Sciences Mathématiques BIOF
Correction Série N°3 : CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Exercice1 : 1) Vérifier que : cos 3pi/10 = sin 2pi/10
2) a) Montrer que : forall x in R : cos 3x = (1-4sin^2 x)cos x

b) En déduire les valeurs de : cos pi/10 et sin pi/10
3) Montrer que : sin 7pi/30 = 1/8 \* (sqrt(3)\*sqrt(10+2\*sqrt(5)) - sqrt(5) + 1)

Solution : 1) Vérifions que : cos 3pi/10 = sin 2pi/10
On a : 3pi/10 + 2pi/10 = 5pi/10 = pi/2 => 3pi/10 + 2pi/10 = pi/2 - 2pi/10
Donc : cos 3pi/10 = cos(pi/2 - 2pi/10) = sin 2pi/10
2) a) Montrons que : forall x in R : cos 3x = (1-4sin^2 x)cos x
cos 3x = cos(x+2x) = cos(x)cos(2x) + sin(x)sin(2x) = cos(x)(1-4sin^2 x)cos x
cos 3x = cos(x)cos(2x) + sin(x)sin(2x) = cos(x)(1-4sin^2 x)cos x
Donc : cos 3x = cos(x)(1-4sin^2 x)cos x = cos(x)(1-4sin^2 x)cos x = cos(x)(1-4sin^2 x)cos x

b) Déduisons les valeurs de : cos pi/10 et sin pi/10
On sait que : forall x in R : cos 3x = (1-4sin^2 x)cos x donc pour : x = pi/10
cos 3pi/10 = (1-4sin^2 pi/10)cos pi/10 et on a : cos 3pi/10 = sin 2pi/10
Donc : (1-4sin^2 pi/10)cos pi/10 = sin 2pi/10 => (1-4sin^2 pi/10)cos pi/10 = 2sin pi/10 cos pi/10
car : sin 2x = 2sin x cos x
=> 1-4sin^2 pi/10 = 2sin pi/10 car cos pi/10 != 0 => 4sin^2 pi/10 + 2sin pi/10 - 1 = 0 On : Delta = b^2 - 4ac = 4
Donc : sin pi/10 = (-1+sqrt(5))/4 ou sin pi/10 = (-1-sqrt(5))/4 or or 0 < pi/10 < pi/2 donc : sin pi/10 > 0
Donc : sin pi/10 = (-1+sqrt(5))/4
Pour tout x in R, cos^2 x + sin^2 x = 1 donc : cos^2(pi/10) = 1 - sin^2(pi/10)
Donc : cos^2(pi/10) = 1 - ((sqrt(5)-1)/4)^2 = 1 - (5+2\*sqrt(5)+1)/16 C'est-à-dire : cos^2(pi/10) = (10+2\*sqrt(5))/16

PROF: ATMANI NAJIB

Donc : cos(pi/10) = sqrt((10+2\*sqrt(5))/16) ou cos(pi/10) = -sqrt((10+2\*sqrt(5))/16)
De plus on a : 0 < pi/10 < pi/2 donc : cos(pi/10) > 0
Par suite : cos(pi/10) = sqrt((10+2\*sqrt(5))/16)

3) Montrons que : sin 7pi/30 = 1/8 \* (sqrt(3)\*sqrt(10+2\*sqrt(5)) - sqrt(5) + 1)
On a : 7pi/30 = pi/3 - pi/10 donc : sin 7pi/30 = sin(pi/3 - pi/10) = sin(pi/3)cos(pi/10) - cos(pi/3)sin(pi/10)
sin 7pi/30 = sin(pi/3)cos(pi/10) - cos(pi/3)sin(pi/10) = (sqrt(3)/2)cos(pi/10) - (1/2)sin(pi/10)
sin 7pi/30 = (sqrt(3)/2)cos(pi/10) - (1/2)sin(pi/10) = (sqrt(3)/2)cos(pi/10) - (1/2)sin(pi/10) = 1/8 \* (sqrt(3)\*sqrt(10+2\*sqrt(5)) - sqrt(5) + 1)

Exercice2 : Soit x in R ; Montrer que :
cos x + cos(x + 2pi/3) + cos(x + 4pi/3) = 0 et sin x + sin(x + 2pi/3) + sin(x + 4pi/3) = 0

Solution : Montrons que : cos x + cos(x + 2pi/3) + cos(x + 4pi/3) = 0
On sait que : cos p + cos q = 2cos((p+q)/2)cos((p-q)/2)
Donc : cos x + cos(x + 2pi/3) = 2cos(x + pi/3)cos(pi/3) = 2cos(x + pi/3)(1/2) = cos(x + pi/3)
Donc : cos x + cos(x + 2pi/3) + cos(x + 4pi/3) = cos(x + pi/3) + cos(x + 4pi/3) = cos(x + pi/3) + cos(x + pi/3 + pi) = cos(x + pi/3) - cos(x + pi/3) = 0
Donc : cos x + cos(x + 2pi/3) + cos(x + 4pi/3) = 0
On sait que : sin p + sin q = 2sin((p+q)/2)cos((p-q)/2)
Donc : sin x + sin(x + 2pi/3) = 2sin(x + pi/3)cos(pi/3) = 2sin(x + pi/3)(1/2) = sin(x + pi/3)
Donc : sin x + sin(x + 2pi/3) + sin(x + 4pi/3) = sin(x + pi/3) + sin(x + 4pi/3) = sin(x + pi/3) + sin(x + pi/3 + pi) = sin(x + pi/3) - sin(x + pi/3) = 0
Donc : sin x + sin(x + 2pi/3) + sin(x + 4pi/3) = 0

http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 2

Exercice3 : P(x) = sin 2x - sin x et Q(x) = 1 + cos x + cos 2x
Montrer que : P(x) = sin x(2cos x - 1) et P(x) = cos x(2cos x + 1)
Solution : Q(x) = 1 + cos x + cos 2x = 1 + cos x + 2cos^2 x - 1 = cos x + 2cos^2 x = cos x(1 + 2cos x)
P(x) = sin 2x - sin x = 2sin x cos x - sin x = sin x(2cos x - 1)

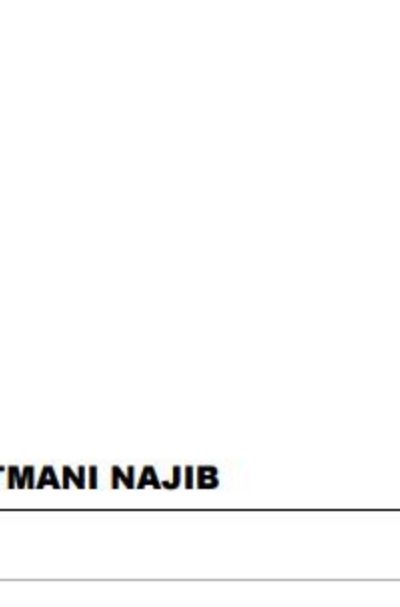
Exercice4 : 1) Résoudre dans R l'équation suivantes : (E) : 2cos^2 x - 3sqrt(3)cos x + 3 = 0
2) En déduire les solutions de l'équation (E) dans [0 ; pi]
Solution : 1) On pose t = cos x et l'équation (E) devient : 2t^2 - 3sqrt(3)t + 3 = 0
On cherche les racines du trinôme 2t^2 - 3sqrt(3)t + 3 :
Calcul du discriminant : Delta = b^2 - 4ac = (-3sqrt(3))^2 - 4\*2\*3 = 27 - 24 = 3
Les racines sont : t1 = (3sqrt(3) + sqrt(3))/4 = sqrt(3) et t2 = (3sqrt(3) - sqrt(3))/4 = sqrt(3)/2
Donc : cos x = sqrt(3)/2 et cos x = sqrt(3)
Pour : cos x = sqrt(3) :
On sait que : -1 <= cos x <= 1 donc l'équation cos x = sqrt(3) n'admet pas de solutions dans R
Pour : cos x = sqrt(3)/2 :
cos x = sqrt(3)/2 Équivalent à : cos x = cos(pi/6) Équivalent à : x = pi/6 + 2kpi ou x = -pi/6 + 2kpi
Donc : S\_k = { -pi/6 + 2kpi ; pi/6 + 2kpi / k in Z }

2) On a deux méthodes soit l'encadrement ou en donnant des valeurs a k
a) Pour : x = pi/6 + 2kpi
Prends par exemple la valeur k = -1 et remplaçons on obtient : x = pi/6 - 2pi = -11pi/6 ; cette valeur n'appartient pas à [0 ; pi] ; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -1 ne conviendront pas non plus.
Par contre, si je choisis k = 0 : on obtient x = pi/6 ; cette valeur appartient à [0 ; pi].
Pour k = 1 : x = pi/6 + 2pi in [0 ; pi]
Il est inutile de poursuivre pour des valeurs supérieures à 1
Donc : la seule valeur dans [0 ; pi] est : x = pi/6
b) Pour : x = -pi/6 + 2kpi
La même démarche que précédemment
Pas de valeurs dans [0 ; pi] ; Conclusion : S\_{[0;pi]} = { pi/6 }

http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 3

Exercice5 : Résoudre dans [0 ; 2pi] l'inéquation suivante : cos x < sqrt(3)/2
Solution : cos x = sqrt(3)/2 Équivalent à : cos x = cos(pi/6)
Équivalent à : x = pi/6 + 2kpi ou x = -pi/6 + 2kpi et k in Z
Et puisque : x in [0 ; 2pi] alors : x = 11pi/6 et x = pi/6 (on utilisant les encadrements)
cos x < sqrt(3)/2 Équivalent à : cos x < cos(pi/6)
En utilisant le cercle trigonométrique on compare cos x et sqrt(3)/2 dans [0 ; 2pi]
On trouve que : S = ]pi/6 ; 11pi/6[

Exercice6 : Résoudre dans [-pi ; pi] l'inéquation suivante : 3tan x - sqrt(3) >= 0
Solution :
L'inéquation 3tan x - sqrt(3) >= 0 est définie si et seulement si : x = pi/2 + kpi avec k in Z
Et puisque : x in [-pi ; pi] alors : x = pi/2 et x = -pi/2
Résolution de l'équation : 3tan x - sqrt(3) = 0
On a 3tan x - sqrt(3) = 0 Équivalent à : tan x = sqrt(3)/3
On sait que : tan pi/6 = sqrt(3)/3
tan x = sqrt(3)/3 Équivalent à : x = pi/6 + kpi avec k in Z
Et puisque : x in [-pi ; pi] alors : x = pi/6 ou x = -5pi/6
En utilisant le cercle trigonométrique on compare tan x et sqrt(3)/3 dans [-pi ; pi]
On trouve que : tan x >= sqrt(3)/3
Équivalent à : x in [-5pi/6 ; -pi/2[ union ]pi/6 ; pi/2[
Donc : S = [-5pi/6 ; -pi/2[ union ]pi/6 ; pi/2[



Exercice7 : 1) Soit alpha in ]0 ; pi/2[ tel que : tan alpha = 1/7 et soit beta in ]0 ; pi/4[ tel que : sin beta = sqrt(10)/10
http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 4

1) Calculer : tan(2beta)
2) En déduire que : alpha + 2beta = pi/4
Solution : 1) On a : tan(2beta) = (2tan(beta))/(1-tan^2(beta)) forall beta in ]0 ; pi/4[
Or tan(beta) = sin(beta)/cos(beta) => tan^2(beta) = sin^2(beta)/cos^2(beta) = sin^2(beta)/(1-sin^2(beta)) = 1/10 = 1/10 et comme beta in ]0 ; pi/4[
Alors : tan(beta) > 0 donc : tan(beta) = sqrt(1/10) = 1/3
Par suite : tan(2beta) = (2\*(1/3))/(1-(1/3)^2) = (2/3)/(8/9) = 3/4
2) Déduisons que : alpha + 2beta = pi/4
Calculons : tan(alpha + 2beta)
On a : tan(alpha + 2beta) = (tan(alpha) + tan(2beta))/(1 - tan(alpha)tan(2beta)) = (1/7 + 3/4)/(1 - 1/7 \* 3/4) = (28/28 + 21/28)/(28/28 - 9/28) = 49/19
Donc : tan(alpha + 2beta) = 1
Donc : alpha + 2beta = pi/4 + kpi avec : k in Z
Mais on a : alpha in ]0 ; pi/2[ et beta in ]0 ; pi/4[
Donc : 0 < alpha < pi/2 et 0 < 2beta < pi/2
Donc : 0 < alpha + 2beta < pi
Donc : alpha + 2beta = pi/4
Donc : 0 < pi/4 + kpi < pi c'est-à-dire : 0 < 1/4 + k < 1 => -1/4 < k < 3/4 => k=0
Par suite : alpha + 2beta = pi/4 + 0\*pi = pi/4

Exercice8 : Soit x in ]0 ; pi/3[ et on pose : F(x) = (cos x - sqrt(3)sin x)/(cos x sin x)
1) Montrer que : F(x) = 4 \* (cos(pi/3 + x)/sin 2x
http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 5

3) En déduire que : F(pi/18) = 4
Solution : 1) On a : F(x) = (cos x - sqrt(3)sin x)/(cos x sin x) et on sait que : cos x sin x = 1/2 sin 2x (1)
Transformation de : cos x - sqrt(3)sin x ; a=1 et b=-sqrt(3)
Donc : sqrt(a^2 + b^2) = sqrt(1 + 3) = 2
Donc : cos x - sqrt(3)sin x = 2 \* (1/2 cos x - sqrt(3)/2 sin x) = 2 \* (cos(pi/3)cos x - sin(pi/3)sin x)
Donc : cos x - sqrt(3)sin x = 2cos(x + pi/3) (2)
De (1) et (2) : F(x) = (2cos(x + pi/3))/(1/2 sin 2x) = 4 \* (cos(x + pi/3)/sin 2x)
F(pi/18) = 4 \* (cos(pi/18 + pi/3)/sin(pi/9)) = 4 \* (cos(7pi/18)/sin(pi/9)) et cos(7pi/18) = cos(pi/2 - pi/9) = sin(pi/9)
Donc : F(pi/18) = 4 \* (sin(pi/9)/sin(pi/9)) = 4
Exercice9 : Soit x in R
1) Factoriser les expressions suivantes : sin 5x - sin 3x et sin 5x + sin 3x
2) Montrer que : forall x in R : sin^2 5x - sin^2 3x = sin 2x \* sin 8x
3) En déduire les solutions dans R de l'équation : 2sin^2 5x + cos 6x - 1 = 0
Solution : 1) On sait que : sin p - sin q = 2cos((p+q)/2)sin((p-q)/2)
sin p - sin q = 2cos((p+q)/2)sin((p-q)/2)
Donc : sin 5x + sin 3x = 2sin(4x)cos(x)
Donc : sin 5x - sin 3x = 2cos(4x)sin(x)
2) Montrons que : forall x in R : sin^2 5x - sin^2 3x = sin 2x \* sin 8x
sin^2 5x - sin^2 3x = (sin 5x + sin 3x)(sin 5x - sin 3x) = 2sin(4x)cos(x) \* 2sin(x)cos(4x)
Donc : sin^2 5x - sin^2 3x = 2sin(4x)cos(4x) \* 2sin(x)cos(x) = sin(8x)sin(2x)
Car : 2cos(X) \* sin(X) = sin(2X)
3) Déduisons les solutions dans R de l'équation : 2sin^2 5x + cos 6x - 1 = 0
http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 6

cos 6x = cos(2(3x)) = cos^2 3x - sin^2 3x = 1 - 2sin^2 3x
2sin^2 5x + cos 6x - 1 = 0 <=> 2sin^2 5x + 1 - 2sin^2 3x - 1 = 0
<=> 2sin^2 5x - 2sin^2 3x = 0 <=> sin^2 5x - sin^2 3x = 0 <=> sin 2x \* sin 8x = 0
<=> sin 2x = 0 ou sin 8x = 0 <=> 2x = kpi ou 8x = kpi ; k in Z
<=> x = kpi/2 ou x = kpi/8 ; k in Z
Donc : S\_k = { kpi/2 ; kpi/8 / k in Z }

Exercice10 : Soit f la fonction numérique définie par : f(x) = (1-cos x)/(1+cos x)
1) Déterminer : D\_f le domaine de définition de la fonction f
2) Résoudre dans D\_f l'équation : f(x) = (sqrt(2)-1)^2
3) Montrer que : forall x in D\_f : f(x) = (tan(x/2))^2
4) Calculer : f(pi/4) et en déduire que : tan(pi/8) = sqrt(2)-1
Solution : 1) On a f(x) = (1-cos x)/(1+cos x)
D\_f = {x in R / 1+cos x != 0}
1+cos x = 0 <=> cos x = -1 <=> x = (2k+1)pi avec : k in Z
D\_f = {x in R / x != (2k+1)pi} = R - {(2k+1)pi ; k in Z}
2) Résolvons dans D\_f l'équation : f(x) = (sqrt(2)-1)^2
Soit : x in R - {(2k+1)pi ; k in Z}
f(x) = (sqrt(2)-1)^2 <=> (1-cos x)/(1+cos x) = (sqrt(2)-1)^2 <=> 1-cos x = (1+cos x)(3-2sqrt(2))
<=> 1-3+2sqrt(2) = cos x + (3-2sqrt(2))cos x <=> cos x(4-2sqrt(2)) = 2sqrt(2)-2 <=> cos x = (2sqrt(2)-2)/(4-2sqrt(2))
<=> cos x = (2(sqrt(2)-1))/(2(2-sqrt(2))) <=> cos x = (sqrt(2)-1)/(2-sqrt(2)) <=> cos x = (sqrt(2)-1)/(2-sqrt(2)) <=> cos x = sqrt(2)/2
f(x) = (sqrt(2)-1)^2 <=> cos x = sqrt(2)/2 <=> x = pi/4 + 2kpi ou x = -pi/4 + 2kpi et k in Z
Donc : S\_k = { -pi/4 + 2kpi ; pi/4 + 2kpi / k in Z }

3) Montrons que : forall x in D\_f : f(x) = (tan(x/2))^2
On a : cos x = cos(2(x/2)) = cos^2(x/2) - sin^2(x/2)
http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 7

Donc : 1 + cos x = cos^2(x/2) + 1 - sin^2(x/2) = cos^2(x/2) + cos^2(x/2) = 2cos^2(x/2)
Et on a : 1 - cos x = 1 - cos^2(x/2) + sin^2(x/2) = 2sin^2(x/2)
Donc : f(x) = (1-cos x)/(1+cos x) = (2sin^2(x/2))/(2cos^2(x/2)) = (sin(x/2)/cos(x/2))^2 = (tan(x/2))^2
4) Calculons : f(pi/4) et en déduisons que : tan(pi/8) = sqrt(2)-1
f(pi/4) = (1-cos(pi/4))/(1+cos(pi/4)) = (1-sqrt(2)/2)/(1+sqrt(2)/2) = (2-sqrt(2))/(2+sqrt(2)) = (2-sqrt(2))^2/(4-2) = (6-4sqrt(2))/2 = 3-2sqrt(2) = (sqrt(2)-1)^2
D'autre part on a : f(x) = (tan(x/2))^2 donc : f(pi/4) = (tan(pi/8))^2 = (tan(pi/8))^2
Alors : (tan(pi/8))^2 = (sqrt(2)-1)^2
Alors : tan(pi/8) = sqrt(2)-1 > 0 ou tan(pi/8) = -sqrt(2)+1 < 0 et comme pi/8 in ]0 ; pi/2[ alors tan(pi/8) > 0
Par suite : tan(pi/8) = sqrt(2)-1
Exercice11 : Soit f la fonction numérique définie par : f(x) = cos 2x + sqrt(3)sin 2x - sin x - sqrt(3)cos x + 2
1) Calculer : f(pi/6)
2) Montrer que : f(x) = (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1)
3) Résoudre dans R l'équations : f(x) = 0
Solution : 1) On a : f(x) = cos 2x + sqrt(3)sin 2x - sin x - sqrt(3)cos x + 2
Donc : f(pi/6) = cos(pi/3) + sqrt(3)sin(pi/3) - sin(pi/6) - sqrt(3)cos(pi/6) + 2 = 1 + sqrt(3) - 1/2 - sqrt(3) + 2 = 2
Donc : f(pi/6) = 2
Donc : f(pi/6) = cos(pi/3) + sqrt(3)sin(pi/3) - sin(pi/6) - sqrt(3)cos(pi/6) + 2 = 1 + sqrt(3) - 1/2 - sqrt(3) + 2 = 2
Donc : f(pi/6) = 1/2 + sqrt(3) \* sqrt(3)/2 - 1/2 - sqrt(3) \* sqrt(3)/2 + 2 = 1/2 - 3/2 - 3/2 + 2 = 2
Donc : f(pi/6) = 2

http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 8

2) Montrons que : f(x) = (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1)
On a : f(x) = cos 2x + sqrt(3)sin 2x - sin x - sqrt(3)cos x + 2
Donc fait que : cos 2x = 2cos^2 x - 1 et sin 2x = 2sin x cos x
On a : f(x) = 2cos^2 x - 1 + 2sqrt(3)sin x cos x - sin x - sqrt(3)cos x + 2
D'autre part (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1) = sin^2 x + 3cos^2 x + 2sqrt(3)sin x cos x - sin x - sqrt(3)cos x
Donc : (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1) = 1 - cos^2 x + 3cos^2 x + 2sqrt(3)sin x cos x - sin x - sqrt(3)cos x
Donc : (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1) = 2cos^2 x + 2sqrt(3)sin x cos x - sin x - sqrt(3)cos x + 1
Alors : f(x) = (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1)
3) Résolvons dans R l'équations : f(x) = 0
f(x) = 0 <=> (sin x + sqrt(3)cos x)(sin x + sqrt(3)cos x - 1) = 0
<=> sin x + sqrt(3)cos x = 0 ou sin x + sqrt(3)cos x - 1 = 0
<=> 2 \* (1/2 sin x + sqrt(3)/2 cos x) = 0 ou 2 \* (1/2 sin x + sqrt(3)/2 cos x) = 1
<=> sin(pi/6)sin x + cos(pi/6)cos x = 0 ou 2 \* (sin(pi/6)sin x + cos(pi/6)cos x) = 1
<=> cos(x - pi/6) = 0 ou cos(x - pi/6) = 1/2
<=> cos(x - pi/6) = 0 ou cos(x - pi/6) = cos(pi/3)
<=> x - pi/6 = pi/2 + kpi ou x - pi/6 = pi/3 + 2kpi ou x - pi/6 = -pi/3 + 2kpi
<=> x = pi/2 + 2kpi ou x = -pi/6 + 2kpi ou x = 2pi/3 + kpi
Donc : S\_k = { (2pi/3 + kpi)/2 ; -pi/6 + 2kpi ; -pi/6 + 2kpi / k in Z }

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

http://www.xriadiat.com/ PROF: ATMANI NAJIB 9