1er BAC Sciences Expérimentales BIOF

1er BAC Sciences Mathématiques BIOF

Correction Série N°4 : *CALCUL TRIGONOMETRIQUE*

Exercice1 : Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)$

1) Montrer que : $A(x)$ est un réel constant

2) Résoudre dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

Solution : 1) $A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2(2x)=\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2$

$A(x)=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\times\cos^2 x=(\sin^2 x)^2+2\sin^2 x\times\cos^2 x+(\cos^2 x)^2$

Donc : $A(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=(1)^2=1$

Donc : $A(x)$ est un réel constant

2) Résolvons dans $]-\pi;\pi[$ l'équation : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$

$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\Leftrightarrow A(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)$

Puisque : $A(x)=1$

Donc : $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin(2x)\Leftrightarrow\sin(2x)=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\quad k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

Dans $]-\pi;\pi[$ on a : $-\pi<\frac{\pi}{4}+k\pi<\pi\Leftrightarrow-\frac{5\pi}{4}<k\pi<\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{4}<k<\frac{3}{4}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=-1$ *ou* $k=0$

Donc : $x=\frac{\pi}{4}$ *ou* $x=\frac{-3\pi}{4}$

Donc : $S_{]-\pi;\pi[}=\left\{-\frac{3\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right\}$

Exercice2 : Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $a=\cos x+\cos 3x$ et $b=\sin x+\sin 3x$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2=4\cos^2(2x)$

2) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a=2\cos x\times\cos 2x$ et $b=-2\sin 2x\times\cos x$

b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a+b=2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0$

4) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0$

Solution : 1) a) →Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2=4\cos^2(2x)$

Soit $x\in\mathbb{R}$: On a : $a=\cos x+\cos 3x$ et $b=\sin x+\sin 3x$

Donc : $a^2=(\cos x+\cos 3x)^2=\cos^2 x+\cos^2 3x+2\cos x\times\cos 3x$

Donc : $b^2=(\sin x+\sin 3x)^2=\sin^2 x+\sin^2 3x+2\sin x\times\sin 3x$

Par suite : $a^2+b^2=1+1+2\sin x\times\sin 3x+2\cos x\times\cos 3x$

Donc : $a^2+b^2=2+2(\cos x\times\cos 3x+\sin x\times\sin 3x)=2+2\cos(x+3x)=2+2\cos(4x)$

Donc : $a^2+b^2=2+2\cos(2(2x))=2+2(2\cos^2(2x)-1)=4\cos^2(2x)$

Par suite : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a^2+b^2=4\cos^2(2x)$

2) a) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a=2\cos x\times\cos 2x$ et $b=-2\sin 2x\times\cos x$

On a : $a=\cos x+\cos 3x=2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=2\cos(2x)\cos(-x)=2\cos x\cos(2x)$

On a : $b=\sin x+\sin 3x=2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)=2\sin(2x)\cos(-x)=2\cos x\sin(2x)$

b) Montrons que : $\forall x\in\mathbb{R}$: $a+b=2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$a+b=2\cos x\cos(2x)+2\sin(2x)\cos x=2\cos x(\cos(2x)+\sin(2x))$

$a+b=2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right)=2\sqrt{2}\cos x\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos(2x)+\sin\frac{\pi}{4}\sin(2x)\right)=2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'équation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0$

$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x=0\Leftrightarrow a+b=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\cos x=0$ *ou* $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ *ou* $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad;k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ *ou* $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\quad;k\in\mathbb{Z}$

$0\le\frac{\pi}{2}+k\pi\le\pi\Leftrightarrow-0,5\le k\le 0,5\Rightarrow k=0\Rightarrow\boxed{x=\frac{\pi}{2}}$

$0\le\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\le\pi\Leftrightarrow-\frac{3\pi}{8}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{5\pi}{8}\Leftrightarrow-\frac{3}{4}\le k\le\frac{5}{4}\Rightarrow k=0$ *ou* $k=1\Rightarrow\boxed{x=\frac{3\pi}{8}}$ *ou* $\boxed{x=\frac{7\pi}{8}}$

Donc : $S_{[0;\pi]}=\left\{\frac{3\pi}{8};\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{8}\right\}$

4) Résolvons dans $[0;\pi]$ l'inéquation : $\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0$

$\cos x+\sin x+\cos 3x+\sin 3x<0\Leftrightarrow a+b<0\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\cos x\times\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\begin{cases}\cos x>0\\x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

$\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0\\x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=X:\begin{cases}\cos(X)>0\\X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]\end{cases}\Leftrightarrow X\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

$\begin{cases}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0\\x\in[0;\pi]\end{cases}\Leftrightarrow X+\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]\Leftrightarrow 2x\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{3\pi}{8}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$

Tableau de signe :

x	0		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$\cos x$		+		+	0	−		−	
$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$		+	0	−		−	0	+	
$a+b$		+	0	−	0	+	0	−	

Donc : $S=\left]\frac{7\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{8};\pi\right]$

Exercice3 : On pose : $A=\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{3\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}$

1) Monter que : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) Monter que : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) En déduire que : $A=\frac{3}{16}$

Solution : On a : $\sin a\times\sin b=-\frac{1}{2}(\cos(a+b)-\cos(a-b))$

1) $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)-\cos\left(-\frac{3\pi}{9}\right)\right)$

$\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

Donc : $\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$

2) On a : $\cos a\times\sin b=-\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $\cos\frac{5\pi}{9}\times\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) Déduction : $A=\frac{3}{16}$?

$A=\left(\sin\frac{\pi}{9}\times\sin\frac{4\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)\times\sin\frac{2\pi}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$A=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{9}-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\left(\pi-\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

$A=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\sin\frac{7\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{9}\right)=\frac{3}{16}$

Donc : $A=\frac{3}{16}$

Exercice4 : Soit $x\in\mathbb{R}$ on pose : $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

1) Calculer : $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et calculer $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) En déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I=[-\pi;\pi]$ l'équations : $A(x)=\frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquation : $A(x)\le\frac{1}{2}$

Solution : 1) $\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos x\cos 2x-\sin 2x\sin x$

$=\cos x(2\cos^2 x-1)+\sin x\times 2\cos x\sin x=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\sin^2 x$

$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x(1-\cos^2 x)=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x+2\cos^2 x$

$=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x(4\cos^2 x-3)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$

2) $A(x)=\cos 3x-3\sin x+3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos^3 x-3\cos x-3\sin x+3(\sin x+\cos x)=4\cos^3 x$

3)a) $A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4\cos^3 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos^3 x-\frac{1}{8}=0\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)=0$

Car : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\begin{cases}X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{4}=0\\X=\cos x\end{cases}$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ donc :

$A(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}$

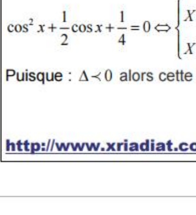
$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $S_{[-\pi;\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)\le 0$

Puisque : $\Delta\prec 0$ alors : $\cos^2 x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\succ 0$

Donc : $A(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x\le\cos\frac{\pi}{3}$



Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice5 : Soit : $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin\theta+5\cos\theta=5$

1) Monter que : $5\sin\theta-3\cos\theta=3$

2) Déduire la valeur de : $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Solution :1) $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=5-5\cos\theta\Leftrightarrow 3\sin\theta=5(1-\cos\theta)\Leftrightarrow 3\sin\theta=5\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Car : $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

Donc: $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 3\sin\theta=10\sin^2\frac{\theta}{2}$

$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=10\sin^2\frac{\theta}{2}$ Car : $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow 6\cos\frac{\theta}{2}=10\sin\frac{\theta}{2}$ car $\sin\frac{\theta}{2}\neq 0$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=5\Leftrightarrow\tan\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

Or on sait que : $\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$ et $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{5\left(2\tan\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}-\frac{3\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

Donc : $3\sin\theta+5\cos\theta=\frac{10\times\frac{3}{5}}{1+\frac{9}{25}}-\frac{3\left(1-\frac{9}{25}\right)}{1+\frac{9}{25}}=\frac{102}{34}=3$

2) On a le système : $\begin{cases}3\sin\theta+5\cos\theta=5\\5\sin\theta-3\cos\theta=3\end{cases}$ on le résolvant on trouve : $\cos\theta=\frac{8}{17}$ et $\sin\theta=\frac{15}{10}$

Exercice6 : 1) Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ tel que : $\tan\alpha=-\frac{1}{7}$ et soit $\beta\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\beta=2$

Calculer : $\alpha-2\beta$

Solution : Calculons : $\tan(\alpha-2\beta)$

On a : $\tan(\alpha-2\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(2\beta)}{1+\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)}$

Calculons : $\tan(2\beta)$

$\tan(2\beta)=\frac{2\tan(\beta)}{1-\tan^2(\beta)}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$

Donc : $\tan(\alpha-2\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(2\beta)}{1+\tan(\alpha)\times\tan(2\beta)}=\frac{-\frac{1}{7}+\frac{4}{3}}{1+\frac{1}{7}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1$

Donc : $\alpha-2\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Mais on a : $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ et $\beta\in\left]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

Donc : $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ et $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ et $\frac{\pi}{2}<2\beta<\pi$

Donc : $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ et $-\pi<-2\beta<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{3\pi}{2}<\alpha-2\beta<-\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{3\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+k\pi<-\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{3}{2}<\frac{1}{4}+k<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow-1,75<k<-0,75\Rightarrow\boxed{k=-1}$

Par suite : $\alpha-2\beta=\frac{\pi}{4}+(-1)\times=\frac{\pi}{4}-\pi=\boxed{-\frac{3\pi}{4}}$

Exercice7 : 1) Monter que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

2) Vérifier que : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$

3) On pose : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=t$:

Monter que : t est une solution de l'équation : $4x^2-2x-1$ et déduire que : $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

4) En déduire : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Solution : 1) Montons que : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

$\cos 5x=\cos(2x+3x)=\cos(2x)\cos(3x)-\sin(2x)\sin(3x)$

Comme on a : $\cos 2x=2cox^2x-1$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Et on a $\cos 3x=\cos(x+2x)=\cos(x)\times\cos(2x)-\sin(x)\times\sin(2x)(1-4\sin^2 x)\cos x$

Comme on a : $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ et $\sin 2x=2\sin x\cos x$

Donc : $\cos 3=\cos x\times(1-2\sin^2 x)-2\sin^2 x\cos x=\cos x\times(1-2\sin^2 x-2\sin^2 x)=\cos x\times(1-4\sin^2 x)$

Donc : $\cos 3=\cos x\times(1-4\sin^2 x)$

$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin(x)\times\cos(2x)+\cos(x)\times\sin(2x)$

$\sin 3x=\sin(x+2x)=\sin x\times(-1+2\cos^2 x)+\cos x\times 2\sin x\cos x$

$\sin 3x=\sin x\times(-1+2\cos^2 x+2\cos^2 x)=\sin x\times(-1+4\cos^2 x)$

Donc: $\cos 5x=\sin x\times(2\cos^2 x-1)(4\cos^2 x-3)\cos x-2\cos x\sin^2 x\times(4\cos^2 x-1)$

$\cos 5x=(2\cos^2 x-1)(4\cos^2 x-3\cos x)-2\cos x(1-\cos^2 x)(4\cos^2 x-1)$

$\cos 5x=8\cos^5 x-6\cos^3 x-4\cos^3 x+3\cos x-8\cos^3 x+2\cos x+8\cos^5 x-2\cos^3 x$

Donc: $\forall x\in\mathbb{R}$; $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$

2) Vérifions que : $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$

$(4x^2-2x-1)^2=16x^4+4x^2+1-1-16x^3+8x^2+4x$

$(4x^2-2x-1)^2=16x^4-4x^2-16x^3+4x+1$

Donc: $(4x^2-2x-1)^2=16x^4-16x^3-4x^2+4x+1$

Donc: $(x+1)(4x^2-2x-1)^2=(x+1)(16x^4-4x^2-16x^3+4x+1)$

Donc: $(x+1)(4x^2-2x-1)^2=16x^5-16x^4-4x^3+4x^2+16x^4-16x^3-4x^2+4x+1$

Donc: $(x+1)(4x^2-2x-1)^2=16x^5-20x^3+5x+1$

3) On pose : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=t$

Montrons que : t est une solution de l'équation : $4x^2-2x-1$4) et déduisons que : $t=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

On a : $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$ et $16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$

$\cos 5x+1=(\cos x+1)(4\cos^2 x-2\cos x-1)^2$ on prend : $\frac{\pi}{5}=x$ on trouve : $\cos x=t$

$\cos\pi+1=(t+1)(4t^2-2t-1)^2\Leftrightarrow 0=(t+1)(4t^2-2t-1)^2$ et puisque : $t\neq-1\Leftrightarrow t+1\neq 0$

$\Leftrightarrow 0=4t^2-2t-1\quad\Delta=20\quad t=\frac{-\sqrt{5}+1}{4}$ ou $t=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et comme $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=t>0$ car $0\prec\frac{\pi}{5}\prec\frac{\pi}{2}$

Alors : $t=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

4)Déduction : On a : $\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$ et comme/ $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)>0$ car $0\prec\frac{\pi}{5}\prec\frac{\pi}{2}$

Alors : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

On a aussi : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)-1=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1=\frac{6+2\sqrt{5}-8}{8}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

On a aussi : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

On a aussi : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}/2\right)$; $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}/2\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+1\right)$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}+1\right)=\frac{\sqrt{5}+5}{8}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)>0$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

On a aussi : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ car $\sin(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{2}\frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})^2}{80}}=\frac{10-2\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Exercice8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x=0$

Exercice9 : transformer : $\cos x-\sin x$

Exercice10 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3}\,cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

1) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation : $sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\le-\frac{1}{2}$

2) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation :
$4cos^2x-2(1+\sqrt{2})cosx+\sqrt{2}\le 0$

3) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\frac{1+\tan x}{\sin 2x}\ge 0$

Exercice11 : Résoudre dans $\left[-\frac{11\pi}{5},\frac{14\pi}{5}\right]$ l'équation $sin3x\ge\frac{1}{2}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron : Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien