Série d'exercices sur le calcul trigonométrique

Exercice 1

Déterminer les abscisses curvilignes principales des points A_1 , A_2 , A_3 dont l'une des abscisses est respectivement : $\frac{37\pi}{3},\frac{157\pi}{4}, -\frac{1115\pi}{6}$ puis représenter ces points sur le cercle trigonométrique.

Exercice 2

Représenter sur le cercle trigonométrique les points dont les abscisses curvilignes sont les nombres de la forme $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$ Avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit (ABC) un triangle équilatère tel que $(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ .Calculer :

$(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$, $(\overline{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{CB}})$, $(\overline{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}})$.

Exercice 4

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que : $(\overline{\vec{u},\vec{v}}) \equiv \frac{3\pi}{7}\,[2\pi]$ Calculer :

$(\overline{\vec{u},-\vec{v}})$, $(\overline{\vec{v},2\vec{u}})$, $(\overline{\vec{v},-3\vec{u}})$, $(\overline{-\vec{u},-\vec{v}})$

Exercice 5

Soit (ABCD) un parallélogramme , M un point du segment $[AB]$ tel que (DM) est bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}}\right)$ et , N un point du segment $[AB]$ tel que (CN) est bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CN}}\right)$

Démontrer que (CN) et (DM) sont perpendiculaires .

Exercice 6

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique tel que $\left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Déterminer le point M du cercle trigonométrique vérifiant $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

Exercice 7

Calculer $\cos(\frac{7\pi}{6})$, $\sin(\frac{176\pi}{3})$, $\cos(-\frac{139\pi}{6})$, $\tan(\frac{173\pi}{4})$

Exercice 8

Soit U le cercle trigonométrique lié au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer les coordonnées des points A , B , C , D dont les abscisses curvilignes sont respectivement

$\frac{37\pi}{2}$, $\frac{117\pi}{6}$, $\frac{-151\pi}{3}$, $\frac{11983\pi}{4}$

Exercice 9

Soit x un nombre réel . simplifier les expressions:

$$A=\sin(x+\pi)+\cos(x-\pi)-\sin(x-7\pi)+\cos(x-121\pi)$$

$$B=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos(x-\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{117\pi}{2}-x)-\cos(x-\frac{119\pi}{2})$$

Exercice 10

Soit A , B , C trois points du cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes α , $\alpha+\frac{2\pi}{3}$, $\alpha+\frac{4\pi}{3}$ respectivement . avec $\alpha \in IR$.

1) montrer que (ABC) est un triangle équilatère .
2) en déduire que :

$$\cos(\alpha)+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$$

$$\sin(\alpha)+\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$$

Exercice 11

Montrer que pour tout réel x on a :

1) $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

2) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

3) $2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)=-1$

4) $\sin^3 x+\cos^3 x-\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=\sin x+\cos x$

Exercice 12

1) Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $2\cos x+\sqrt{3}=0$ 2) $2\cos x-1=0$ 3) $\sqrt{2}\sin x-1=0$ 4) $\sin x-\cos x=0$

5) $\tan x-1=0$ 6) $\sqrt{3}\tan x+1=0$

7) $\tan(3x)-\tan(x)=0$ 8) $\tan(3x)+\tan(x-\frac{2\pi}{3})=0$

1) $\tan(x).\tan(4x)=-1$ 2) $\cos(2x)+\cos(3x)=2$ 3) $\cos^2(2x)+\cos^2(3x)=1$

2) Résoudre dans $[0,2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin(x-\frac{\pi}{3})+\cos(\frac{\pi}{4}-x)=0$ 2) $\sqrt{3}\tan^2 x+(\sqrt{3}-1)\tan x-1=0$

3) $-2\sin^2 x+\cos x+1=0$

Exercice 13

1) Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1) $2\cos(x)-1\geq 0$ 2) $2\cos(x)-1<0$

3) $2\sin x-\sqrt{3}\geq 0$ 4) $2\sin x+1<0$ 5) $\sqrt{2}\cos(2x)+1<0$ 6) $\cos(2x-\frac{\pi}{4})\geq\frac{1}{2}$

7) $\tan(x)-1>0$ 8) $\tan(2x-\frac{\pi}{3})+\sqrt{3}\leq 0$

2) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :

1) $2\cos 3x+1>0$ 2) $\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})<1$

3) $2\cos^2 x>1$ 4) $2\sqrt{2}\sin^2(x)+(\sqrt{2}-2)\sin x-1\geq 0$

Exercice 14

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2\sin x=\cos y \\ \sin^2 x+\sin^2 y+\cos y+\frac{3}{4}=0 \end{cases}$$

Exercice 15

On considère la fonction $f(x)=\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}$

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f et montrer que $(\forall x\in IR): f(x+\pi)=f(x)$

2) Montrer que $(f(x))^2=2(1+|\sin x|)$ et en déduire que ; $(\forall x\in IR):\sqrt{2}\leq f(x)\leq 2$

3) Montrer que $f(x+\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\sqrt{1+|\cos x|}$ puis résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x+\frac{\pi}{2})=f(x)$.

Exercice 16

Soient a , b ,c les longueurs des trois cotés d'un triangle .

Montrer que $(\forall x \in IR - \left\{ \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\})\ a^2 < \frac{b^2}{\cos^2 x} + \frac{c^2}{\sin^2 x}$

Exercice 17

Soient $a, b\ et\ c$ les mesures des trois angles d'un triangle . montrer ce qui suit :

1) $\sin b.\cos c + \sin c.\cos b = \sin a$

2) $a = b\cos c + c\cos b$

3) $\tan b + \tan c = \frac{\sin a}{\cos b \cos c}$

Exercice 18

1) Montrer que si $|a| \le 1$ et $|b| \le 1$ alors : $ab = 1 \Leftrightarrow (a = 1 et\ b = 1) ou\ (a = -1 et\ b = -1)$

2) Résoudre dans IR l'équation $\sin(4x).sin(6x) = 1$

Exercice 19

Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\sin(a) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1) a) Montrer que : $\cos(2a) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et en déduire $\cos(4a)$.

b) Montrer que a est solution de l'équation : $\cos(4x) = \sin(x)$

2) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos(4x) = \sin(x)$ et en déduire la valeur de a .

Exercice 20

Pour tout $n \in IN$ et $x \in IR$ on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-\frac{1}{3})^k \cos^3(3^k x)$

1) Montrer que pour tout $x \in IR$ $\cos^3(x) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$.

2) Montrer que . $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in IR)$: $S_n(x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}(-\frac{1}{3})^n cos(3^{n+1}x)$

Exercice 21

Soit $n \in IN^*$ et $x \in IR - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ on pose

$$S = \cos x + \cos 2x + ...\cos nx$$

Démontrer que : $S \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{nx}{2}\cos\left(\left(n+1\right)\frac{x}{2}\right)$

Exercice 22

a. Résoudre dans R l'équation : cos 3x = cos 4x.

b. Démontrer que : $\begin{cases} \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \end{cases}$, pour x réel quelconque.

c. En déduire que les solutions de l'équation $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1 = 0$ sont :

$1, \cos\frac{2\Pi}{7}, \cos\frac{4\Pi}{7}, \cos\frac{6\Pi}{7}$.

d. Factoriser $8X^4 - 4X^3 - 8X^2 + 3X + 1$ et en déduire que :

$$\cos\frac{2\Pi}{7} \times \cos\frac{4\Pi}{7} \times \cos\frac{6\Pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

$$\cos\frac{2\Pi}{7} + \cos\frac{4\Pi}{7} + \cos\frac{6\Pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 23

a. Résoudre dans l'équation : $\cos\left(2x-\frac{\Pi}{3}\right)=\sin\left(3x-\frac{\Pi}{12}\right)$.

Préciser les solutions appartenant à $\left]-\Pi,+\Pi\right[$ et les représenter sur un cercle trigonométrique.

b. Résoudre dans IR l'équation $\sqrt{2}\sin^2 x+3\cos x-2\sqrt{2}=0$, puis représenter les solutions sur un cercle trigonométrique.

c. Soit α la solution commune aux a) et b) et appartenant à $\left]-\Pi,+\Pi\right]$. Exprimer cos α en fonction de cos $\frac{\alpha}{2}$ et de sin $\frac{\alpha}{2}$.

En déduire la valeur exacte de cos $\frac{\Pi}{8}$ et de sin $\frac{\Pi}{8}$.

d. Procéder comme au c) pour obtenir la valeur exacte de cos $\frac{\Pi}{16}$ et sin $\frac{\Pi}{16}$. Peut-on faire une conjecture sur l'expression de cos $\frac{\Pi}{2^n}$ et sin $\frac{\Pi}{2^n}$ pour n ≥ 2 et si oui laquelle ?

Exercice 24

Résoudre dans R les équations suivantes

1. $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\Pi}{3}\right)$ - sin x = cos x
2. sin 2x + cos 2x = -1
3. tan x = sin 2x
4. $\sin^3 x + \sin 3x = 0$
5. $\sin^2 x + \frac{5}{2}\cos x = 2$

Exercice 25

Résoudre dans R les équations suivantes :

1. $(\sqrt{3}-1)\sin^2 x-(1+\sqrt{3})\cos x\sin x+1=0$.
2. tan x + 2 cos x – 2 sin x = 1

Exercice 26

Résoudre l'équation suivante et représenter sur le cercle trigonométrique.

$$2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$$

et représenter sur le cercle trigonométrique.

Exercice 27

Résoudre dans IR les équations suivantes :

1) $1+\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x-\cos 2x+\cos 3x$

2) $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$

3) $\sin 5x-\sin 3x=\cos 6x+\cos 2x$

4) $\tan x=\frac{\tan 2x+1}{\tan 2x+1}$

5) $\sin a+\sin(a+x)+\sin(a+2x)+\sin(a+3x)=0$ avec $\sin a\neq 0$

6) $\tan(a+x)\tan(a-x)=\frac{1-2\cos(2a)}{1+2\cos(2a)}$

7) $\sin(5x)+\sin x+2\sin^2 x=1$

Exercice 28

1) Montrer que $(\forall x\in IR)$: $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{5+3\cos(4x)}{8}$

2) Résoudre dans IR l'inéquation $\cos^6 x+\sin^6 x>\frac{13}{16}$

Exercice 29

On considère la fonction $g(x)=4\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x\sin x+3\sin^2 x-4$

1) Montrer que $\forall x\in IR: g(x)=2\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})$

2) Résoudre dans IR l'équation $g(x)=0$ et représenter les solution sur le cercle trigonométrique .

3) résouder dans IR l'inéquation $g(x)\leq 0$.

4) a) Montrer que : $(\forall x\in IR): g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$

b) Calculer $g(\frac{\pi}{12})$ et en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 30

1) Montrer que pour tout $x\in IR$ $\sin 3x=(1+2\cos 2x)\sin x$

2) Soit $\alpha\neq k\pi$ montrer que $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha=\frac{\sin 6\alpha}{2\sin\alpha}$.

3) En déduire $S=\cos^2\frac{\pi}{14}+\cos^2\frac{3\pi}{14}+\cos^2\frac{5\pi}{14}$.

Exercice 31

1) Montrer que : $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{3\pi}{9})$.

2) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

3) En déduire que $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{3\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$

4) Montrer que $P=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$.

Exercice 32

On considère les nombres : $A=cos\frac{2\pi}{7}+cos\frac{4\pi}{7}+cos\frac{6\pi}{7}$ et $B=cos\frac{2\pi}{7}\cdot cos\frac{4\pi}{7}\cdot cos\frac{6\pi}{7}$

et $C=cos\frac{2\pi}{7}\cdot cos\frac{4\pi}{7}+cos\frac{4\pi}{7}\cdot cos\frac{6\pi}{7}+cos\frac{6\pi}{7}\cdot cos\frac{2\pi}{7}$

1) Montrer que $A=4B-1$ 2) Montrer que $C=A$.

3) calculer $B\cdot\sin\frac{2\pi}{7}$ et en déduire les valeurs de A et B et C

4) En déduire que : $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Exercice 33

Soient $a,b,c,d\in IR$ Montrer ce qui suit ;

1) $\sin a-\sin b+\sin c=4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$ avec $a+b+c=\pi$.

2) $\sin(a+c)\sin(a+d)=\sin(b+c)\sin(b+d)$ avec $\sin(a+b+c+d)=0$

3) $4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{c+a}{2}=\sin a+\sin b+\sin c-\sin(a+b+c+d)$

4) (ABC) est un triangle rectangle en A si et seulement si $\sin A-\cos A=cosB-\sin B$

Exercice 34

1) Montrer que : $P=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$

2) Montrer que pour tout $n\in IN$ $P_n=\cos\frac{\pi}{2n+1}\cos\frac{2\pi}{2n+1}\cos\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cdots\cos\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$

(Pour cela on pose $Q_n=\sin\frac{\pi}{2n+1}\cdots\cdots\sin\frac{n\pi}{2n+1}$ et on calcule $P_n.Q_n$.